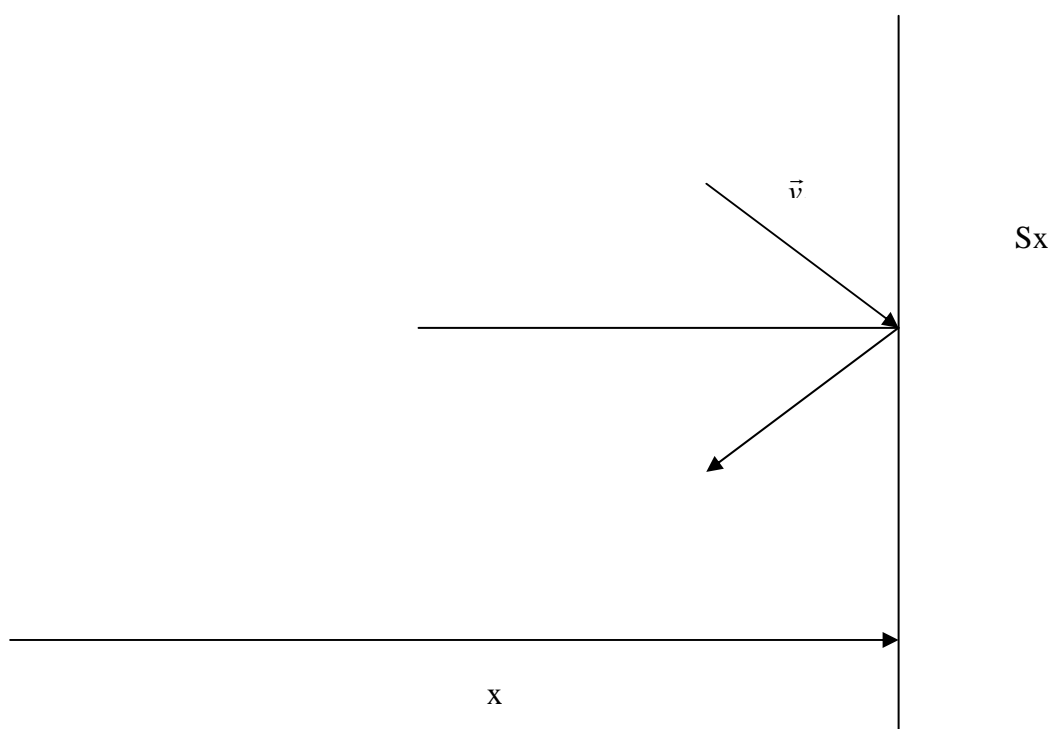


Cenni di teoria cinetica dei gas perfetti



Consideriamo gli urti delle N molecole di un gas perfetto contenuto in un recipiente cubico di spigolo l ; sia m la massa di ogni molecola e \vec{v}_i , di componenti cartesiane (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}) , il vettore velocità della molecola i -esima. Si definisce il solito riferimento cartesiano tridimensionale $Oxyz$ in cui (vedi figura sopra) chiamiamo S_x una delle pareti del recipiente ortogonali all'asse x (analogamente per le pareti ortogonali agli altri due assi coordinati). Si dimostra (vedi testo all'inizio di pag. 442 e fig. 19.3) che la variazione del modulo della quantità di moto della molecola i -esima in un singolo urto contro S_x vale:

$$|\Delta p_i| = 2m|v_{ix}| \quad (1)$$

L'intervallo di tempo t_* tra un urto della molecola i -esima con la parete S_x e il successivo vale

$$t_* = \frac{2l}{|v_{ix}|} \quad (2)$$

Questo perché v_{ix} resta la stessa in modulo durante il moto della molecola nel recipiente (ci sono solo gli urti con S_x e la parete opposta, inoltre le interazioni con le altre molecole in un gas perfetto sono trascurabili).

Il numero di urti della molecola i -esima con la parete S_x nell'intervallo generico Δt vale allora

$$n_i = \frac{\Delta t}{t_*} = \frac{|v_{ix}| \cdot \Delta t}{2l} \quad (3)$$

La variazione totale del modulo della quantità di moto della molecola i -esima nell'intervallo Δt vale:

$$|\Delta p_{i\text{tot}}| = n_i \cdot \Delta p_i = \frac{mv_{ix}^2}{l} \cdot \Delta t \quad (4)$$

Considerando l'effetto degli urti di tutte le N molecole contro S_x nell'intervallo Δt , la variazione complessiva del modulo della quantità di moto delle molecole urtanti nell'intervallo Δt vale:

$$|\Delta p_{\text{tot}}| = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2 \cdot \Delta t}{l} \quad (5)$$

Se divido la grandezza ottenuta per Δt , ottengo il modulo della forza media esercitata **dalla parete sul gas**, che, per il terzo principio della dinamica, è uguale al modulo della forza media \bar{F} esercitata **dal gas sulla parete S_x** :

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{l} \quad (6)$$

Detta $A_x = l^2$ l'area di S_x dalla (6) si ricava subito la pressione del gas:

$$P = \frac{\bar{F}}{A_x} = \frac{\sum_{i=1}^N mv_{ix}^2}{l^3} \quad (7)$$

Se trascuriamo la gravità, la pressione è la stessa (legge di Stevino) su tutte le pareti del recipiente, per cui posso applicare la (7) anche alle pareti S_y e S_z ottenendo, dato che $V = l^3$:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^N mv_{ix}^2}{V} = \frac{\sum_{i=1}^N mv_{iy}^2}{V} = \frac{\sum_{i=1}^N mv_{iz}^2}{V} \quad (8)$$

Usando ora la formula che fornisce il quadrato del modulo del generico vettore velocità

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

possiamo definire il valore medio del quadrato della velocità delle molecole

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{N} \quad (9)$$

da cui si ottiene l'energia cinetica media di una molecola, così definita:

$$\overline{E_c} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \quad (10)$$

Si ottiene infine, sommando membro a membro le tre uguaglianze della (8):

$$3P = \frac{\overline{mv^2}}{V} \text{ da cui si ottiene banalmente}$$

$$PV = \frac{2}{3} N \overline{E_C} \quad (11)$$

Confrontando la (11) con l'equazione di stato dei gas perfetti si ottiene:

$$\overline{E_C} = \frac{3}{2} kT \quad (12)$$

L'energia cinetica media di una molecola in un gas perfetto è **direttamente proporzionale alla temperatura assoluta**...(!). La (12) ci consente di ottenere (e anche questo non è poco!) la formula dell'energia interna di un gas perfetto:

$$E_{\text{int}} = \sum \frac{1}{2} m v_i^2 = N \overline{E_C} = \frac{3}{2} NkT \quad (13)$$

che si può ovviamente scrivere anche nella forma equivalente

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nRT \quad (13 \text{ bis})$$