Teorema fondamentale del calcolo integrale

1) Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Richiamiamo la definizione di partenza (vedi pag. 597 del testo) di **funzione integrale** di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso $[a, b]$; è la funzione $H(x) = \int_a^x f(t)dt$. Ho preferito il nome $H(x)$ a $F(x)$, che è quello del testo, per un motivo che vi sarà presto chiaro.

Teorema (**fondamentale del calcolo integrale**): la funzione integrale $H(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ è derivabile in $[a, b]$ e la sua derivata è $f(x)$.

Dimostrazione: calcoliamo il rapporto incrementale di $H(x)$ in un qualsiasi punto $x_0 \in [a, b]$. Esso vale

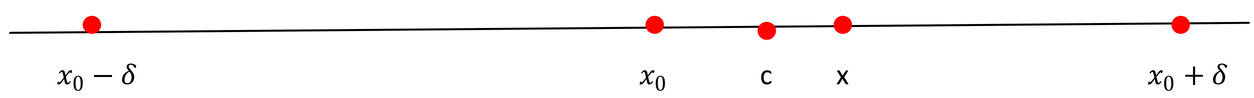
$$\frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0} = f(c) \qquad (1)$$

dove c appartiene all'intervallo orientato $[x_0, x]$. Per ottenere la (1) ho usato la proprietà di additività degli integrali definiti rispetto all'intervallo di integrazione e il teorema della media integrale.

Per la continuità di $f(x)$ fissato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha

$$f(x_0) - \epsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \epsilon \qquad (2)$$

A questo punto (vedi gli intervalli tracciati sotto) si ha che



cioè c appartiene all'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, da cui per la (1) e la (2) si ottiene per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0) + \epsilon \qquad (3)$$

Per definizione di limite ciò significa

$$\lim_{x \to x_o} \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \quad \text{(3 bis)}$$

che è la tesi del teorema.

2) Formula fondamentale del calcolo integrale

A questo punto è possibile calcolare $\int_a^b f(x)dx$ che è l'obiettivo principale del calcolo integrale. Dal teorema appena dimostrato la funzione integrale è una primitiva di $f(x)$, cioè, data una qualsiasi primitiva $F(x)$ di $f(x)$, si ha:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \quad (4)$$

con C costante reale (ecco il motivo della mia scelta di chiamare la funzione integrale $H(x)$ e non $F(x)$).

Poniamo ora $x = a$ nella (4): si ottiene banalmente $C = -f(a)$.

Ponendo poi ancora nella (4) $x = b$ si ottiene infine, essendo t una variabile muta,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (5)$$

La (5) è la cosiddetta **formula fondamentale del calcolo integrale**. Per calcolare l'integrale definito di una qualsiasi funzione $f(x)$ è sufficiente calcolare una sua qualsiasi primitiva $F(x)$ (ovviamente bisogna vedere se ne siamo capaci, cercheremo nei prossimi mesi di sviluppare tali capacità…) ; a quel punto basta calcolare secondo la (5) la variazione di $F(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ e l'integrale è finalmente calcolato.