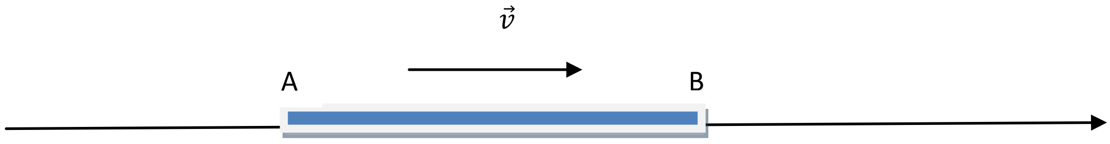
Tempo proprio e contrazione delle lunghezze

Consideriamo un sistema di riferimento S e una barra di lunghezza L in quiete in S come in figura:



Dette A e B le estremità della barra, nel sistema di riferimento (o più semplicemente riferimento) S si ha ovviamente $\overline{AB} = L$. Ho evidenziato nel disegno solo l'asse x per il riferimento S e ho disegnato la barra su quest'asse; vogliamo discutere se e come varia la lunghezza di una barra misurata in due riferimenti in moto relativo con vettore velocità avente la direzione della barra. Vediamo ora cosa succede osservando le cose da un riferimento S' avente vettore velocità $\vec{v}$ disposto lungo l'asse x e verso scelto da sinistra verso destra come in figura; l'asse x' è quindi sovrapponibile all'asse x, non ci sarà comunque qui bisogno di usare esplicitamente riferimenti cartesiani, non importa per esempio di definirne le origini . Per fissare le idee, supponiamo ora che la barra AB sia la piattaforma di una stazione ferroviaria e quindi il riferimento S sia in quiete rispetto alla stazione; il riferimento S' si trova invece su un treno che sta viaggiando (e ovviamente attraversando la stazione) con velocità $\vec{v}$ (e quindi modulo v) come in figura.

Nel riferimento S si compie la misura della lunghezza della barra misurando l'intervallo di tempo Δt tra gli eventi "arrivo del treno in A" e "arrivo del treno in B"; si ottiene $\Delta t = \frac{L}{v}$ da cui

$$L = v\Delta t \qquad (1)$$

Osserviamo che Δt non è un tempo proprio, perché è misurato nel riferimento S usando due orologi differenti, uno posto all'inizio e uno alla fine della piattaforma.

Il riferimento S' vede la stazione avvicinarsi con velocità ancora di modulo v e calcola la lunghezza della barra, cioè della piattaforma, che chiameremo L', misurando ancora l'intervallo di tempo tra i due eventi "arrivo del treno in A" e "arrivo del treno in B"; qui il tempo misurato è un **tempo proprio**, perché misurato nella stessa posizione e dallo stesso orologio in S'.

Si ha dunque la nota relazione che fornisce il tempo proprio (si veda la lezione sull'orologio a luce)

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (2)$$

ma

$$L' = v\Delta\tau \qquad (3)$$

perché lo sperimentatore sul treno vede passare la barra con velocità di modulo v , da cui inserendo la (1) e la (2) nella (3) si ottiene subito

$$L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (4)$$

La (4) è la formula cercata ed esprime la cosiddetta **contrazione delle lunghezze** nel caso di barre le cui lunghezze sono **parallele** alla velocità relativa dei due riferimenti; è chiamata così per ovvi motivi, infatti $L' < L$.

E' del tutto chiaro che la (4) è una diretta conseguenza dalla (2) , cioè del concetto di tempo proprio, che è in realtà il fulcro della teoria. Approfitto infine per utilizzare la (4) nel descrivere in modo formalmente diverso (ma del tutto equivalente) l'esperimento dei muoni: il muone in moto diciamo con velocità $v = 0.995c$ deve percorrere la distanza tra il punto in cui è "nato" (nell'alta atmosfera) e quello in cui è rivelato (a terra), cioè diciamo $L = 15\ Km$. Il muone è l'equivalente dello sperimentatore in moto sul treno, con il proprio orologio "biologico" che smette (in media) di funzionare diciamo all'istante $\tau = 2.1\ \mu s$ dalla sua generazione con relativo decadimento della particella. Per il muone però la distanza percorsa è quella "contratta" data dalla (4) , cioè $L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; la velocità della Terra che gli va incontro ha modulo $v = 0.995c$ e l'intervallo di tempo da lui misurato è quindi $\frac{L'}{v}$ che con i dati qui utilizzati vale circa $5 \cdot 10^{-6} s$. Questo è un intervallo di tempo abbastanza piccolo perché molti muoni possano sopravvivere al viaggio ed essere così rivelati, come sperimentalmente verificato.