

## Primi cenni di fisica quantistica

### 1 ) L'effetto fotoelettrico

Si consideri la fig. 1 . Nella parte sinistra è raffigurata schematicamente una sorgente luminosa indicata con A che emette radiazione elettromagnetica non monocromatica, cioè contenente molte frequenze (diciamo sia nel visibile che nell'ultravioletto) con accanto il dispositivo  $D_1$  che seleziona una direzione definita per la radiazione.

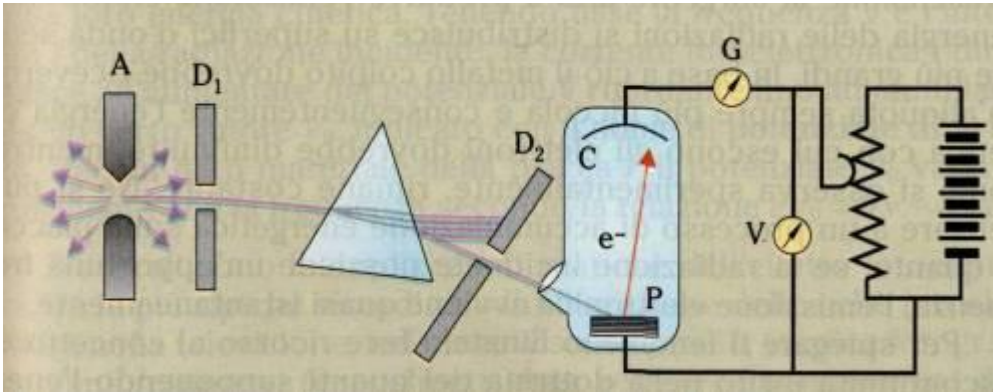


Fig. 1

Il fascio selezionato viene fatto passare attraverso un dispositivo (il prisma in figura) che seleziona una frequenza  $\nu$  arbitrariamente scelta ; si ha quindi la possibilità di variare la frequenza dell'onda elettromagnetica in un ampio range (dal visibile all'ultravioletto).

Tale onda viene poi inviata (vedi parte destra della figura) in una camera (tubo a vuoto) in cui colpisce un elettrodo rivestito di un dato metallo X (contrassegnato in figura con P). Supponendo inizialmente di porre  $V = 0$  nel generatore di tensione variabile (tramite il contatto strisciante in figura) è possibile verificare se circola corrente sull'amperometro contrassegnato con G in figura (la lettera G sta per "galvanometro", un tipo di amperometro capace di rivelare correnti di piccola intensità). Se venisse rivelata una corrente, ciò sarebbe dovuto a elettroni emessi dal metallo X e raccolti dall'elettrodo C (C sta per "collettore"); questa esperienza (insieme a altre, come vedremo) fu compiuta nel 1902 dal tedesco Lenard, che realizzò, come già accennato nel capitolo precedente, le prime misure dell'**effetto fotoelettrico**.

Descriviamo i risultati di questo primo tipo di esperienza, con  $V = 0$  e al variare del metallo X che riveste l'elettrodo P (qui P sta per "placca" ma si utilizzano diversi altri nomi, come "elettrodo fotosensibile"). Vale la seguente prima legge dell'effetto fotoelettrico:

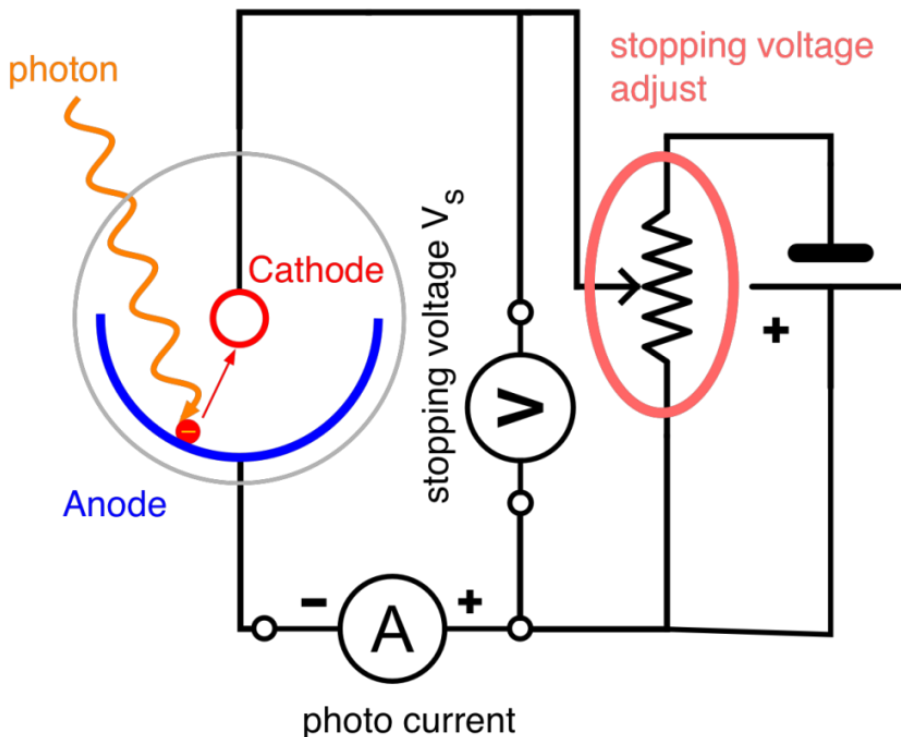
1 ) per ogni metallo X esiste una frequenza minima  $\nu_{0X}$  (frequenza di **soglia fotoelettrica**) tale che il passaggio di corrente rivelato dal galvanometro si osserva solo con radiazione di frequenza  $\nu > \nu_{0X}$ .

La maggior parte delle frequenze di soglia cadono nella regione dell'ultravioletto; solo alcune (in pratica solo con i metalli alcalini) cadono nella regione del visibile.

Un'osservazione finale: potremmo realizzare questo primo esperimento con  $V = 0$  utilizzando una sorgente luminosa più potente (cosa che fu fatta da Lenard) ma non

cambiarebbe nulla; la frequenza di soglia fotoelettrica è indipendente dall'intensità dell'onda elettromagnetica utilizzata.

Consideriamo ora un secondo tipo di esperimento con gli stessi ingredienti di prima (vedi fig. 2). Qui abbiamo  $V \neq 0$  : in particolare, come si vede dalla polarità del generatore, l'elettrodo fotosensibile è a potenziale maggiore dell'elettrodo collettore (vengono qui usati rispettivamente i nomi "anodo" e catodo").



Come è ormai scontato dopo la prima legge 1 , si lavora con un fissato metallo  $X$  e con frequenze  $\nu > \nu_{0X}$ ; si ha quindi un certo numero di elettroni fuoriusciti dall'anodo fotosensibile. Ricordiamo che, essendo stato fatto il vuoto all'interno della camera, ogni elettrone, trascurando le possibili interazioni con gli altri elettroni emessi, è soggetto solo alla forza elettrica all'interno del tubo, che è una forza **frenante** visti i potenziali degli elettrodi. Ciò che si misura ora è, per ogni frequenza  $\nu > \nu_{0X}$  scelta, la differenza di potenziale  $\Delta V_{0X}$ , detta **potenziale di arresto**, tale che l'amperometro non segni corrente, cioè tale che nessun elettrone emesso dall'anodo possa raggiungere il catodo; naturalmente il risultato si ottiene agendo opportunamente sul contatto strisciante finché non si ottiene esattamente una corrente nulla nel galvanometro.

Lenard non poté realizzare in modo accurato questa misura; ci riuscì più di dieci anni dopo l'americano Robert Millikan, (lo stesso che nel 1909 aveva misurato la carica elementare) che pubblicò i risultati della nostra seconda misura nel 1916.

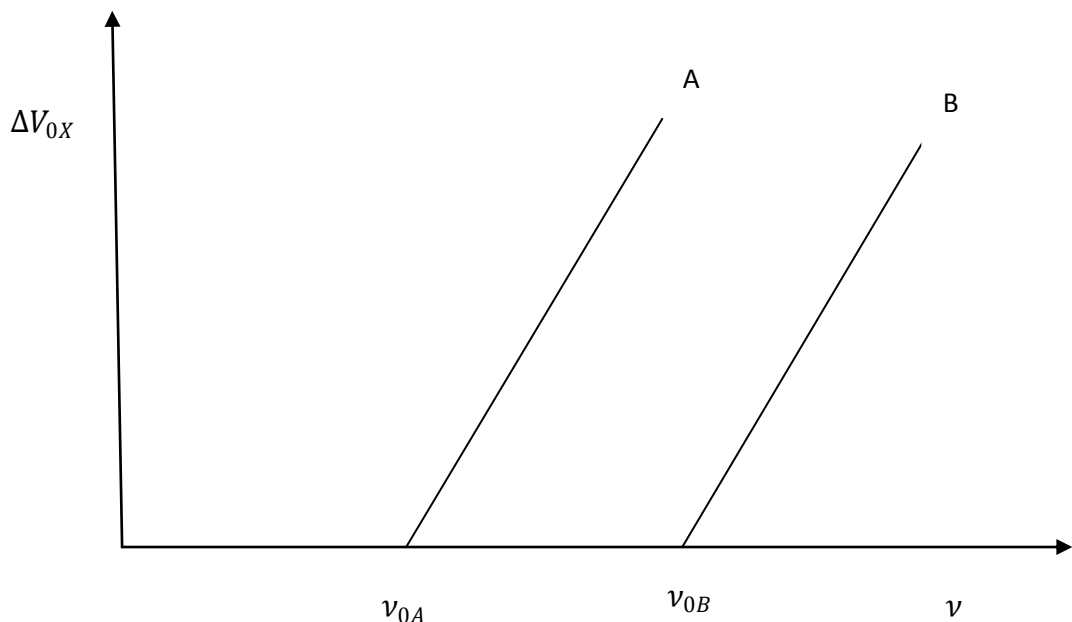
L'andamento, misurato da Millikan per vari metalli A , B , C ... di  $\Delta V_{0X}$  in funzione di  $\nu$  è ancora indipendente dall'intensità della radiazione incidente, ma dipende da  $\nu$  con la seguente legge:

2 ) (seconda legge dell'effetto fotoelettrico) :

$$\Delta V_{0X} = a(\nu - \nu_{0X}) \quad (1.1)$$

con  $a$  costante positiva.

La costante  $a$  è anche indipendente dal metallo fotosensibile X scelto, per cui riportando la legge (1.1) in un grafico cartesiano con  $\nu$  in ascissa e  $\Delta V_{0X}$  in ordinata si ottiene una famiglia di rette dipendenti dal parametro X e aventi la stessa pendenza  $a$  (vedi fig. 3).



In figura sono stati riportati per confronto gli andamenti per due arbitrari metalli A e B.

Vediamo ora come le leggi 1 e 2 furono interpretate da Einstein applicando la sua ipotesi sulla quantizzazione del campo elettromagnetico e sull'energia dei fotoni data dalla (13) del capitolo precedente "Cenni di dinamica relativistica" , che riscrivo per comodità:

$$E = h\nu \quad (1.2)$$

Per uscire da un metallo X e raggiungere l'elettrodo collettore, l'elettrone assorbe un quanto di energia dato dalla (1.2) (si può stimare la probabilità che ne assorba due o più

contemporaneamente e risulta del tutto trascurabile). L'energia assorbita serve ad uscire dal metallo con l'energia cinetica per raggiungere (con velocità nulla se siamo nel caso della seconda legge) l'elettrodo collettore; l'energia per uscire dal metallo è detta lavoro di estrazione  $L_{est}$  e dalla legge 1 si ha:

$$L_{est} = h\nu_{0X} \quad (1.3)$$

Una volta uscito l'elettrone dal metallo, l'energia cinetica massima residua (massima perché nell'uscire può essere persa energia per urti) è quella ottenibile dall'apparato sperimentale della fig. 2 e della relativa legge 2: l'energia cinetica massima all'uscita del metallo è infatti

$$T_{max} = e\Delta V_{0X} \quad (1.4)$$

perché è uguale al lavoro resistente della forza elettrica capace di arrestare gli elettroni. Dalle (1.3) e (1.4) si ottiene:

$$h\nu = h\nu_{0X} + e\Delta V_{0X} \quad (1.5)$$

da cui

$$\Delta V_{0X} = \frac{h}{e}(\nu - \nu_{0X}) \quad (1.6)$$

Confrontando la (1.1) e la (1.6) si ottiene  $a = \frac{h}{e}$ ; il coefficiente  $a$  è quindi uguale per tutti i metalli: è un numero costruito combinando due costanti fondamentali! Come già accennato ci volle il lavoro sperimentale di Millikan per disporre della (1.1), pubblicata nel 1916 (mentre Einstein dedusse la (1.6) nel 1905); Einstein ebbe poi il premio Nobel nel 1921 per questa sua interpretazione dell'effetto fotoelettrico. Faccio notare che con il valore di  $a$  ottenuto sperimentalmente da Millikan e il valore di  $e$  da lui stesso misurato nel 1909, si poteva già avere a disposizione un valore affidabile della costante di Planck  $h$ , che poi è stato rimisurato varie volte in seguito.

## 2) Il modello atomico di BOHR

Come poteva fare un fisico più di 100 anni fa a descrivere un atomo di idrogeno? Ormai l'esistenza degli atomi, come le particelle di dimensioni microscopiche costituenti la materia, era data per scontata; nel 1897 era stato scoperto l'elettrone (Thomson) e trovato in abbondanza in natura; Millikan (1909) scoprì che la carica elettrica è quantizzata e misurò la carica elementare normalmente chiamata **e**, che poi corrisponde in modulo a quella dell'elettrone ( $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ ). Come fu già accertato dalle indagini sperimentali di quel periodo, l'atomo più semplice (il più leggero) esistente in natura è l'idrogeno. Il suo nucleo positivo è costituito da un solo protone, avente carica  $e$  e massa che qui chiameremo  $M$ , tale che  $M \cong 1800m$ , dove  $m$  è il nome che daremo qui alla massa dell'elettrone. Il moto dell'elettrone nel campo del protone, che avendo massa molto maggiore sarà supposto con ottima approssimazione immobile, è governato, **secondo le leggi di Newton**, dall'equazione seguente:

$$\frac{-ke^2}{r^2} \hat{r} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

Il danese Niels Bohr costruì il suo modello di atomo utilizzando ancora la (1), cioè la meccanica classica. Era già stato provato a suo tempo da Newton che applicando la (2.1) si dimostra che gli stati con energia totale  $E < 0$  corrispondono ad un moto su traiettoria ellittica, con il corpo che genera il campo (nel caso in esame il protone) ad occupare uno dei fuochi. Ovviamente, se ci si trasferisce al caso gravitazionale, sostituendo nella (2.1)  $ke^2$  con  $GMm$  si ottiene l'equazione del moto di un pianeta di massa  $m$  nel campo gravitazionale del sole di massa  $M$  e quindi la prima legge di Keplero, avendo il pianeta  $E < 0$  nel suo moto.

La prima ipotesi di lavoro semplificativa di Bohr fu di limitarsi a considerare orbite circolari per il moto dell'elettrone (Bohr trattò poi anche il caso generale di orbite ellittiche, ma non preoccupiamocene qui perché i risultati fisici delle due trattazioni sono molto simili). Dalle leggi del moto circolare uniforme si può allora scrivere, direttamente dalla (2.1):

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (2)$$

utilizzando la formula dell'accelerazione centripeta, valida in questo caso, con  $v$  modulo della velocità dell'elettrone.

Ma la prima ipotesi rivoluzionaria formulata da Bohr fu la seguente:

“ Il modulo del momento della quantità di moto (preferirò chiamarlo con il sinonimo di momento angolare) dell'elettrone, che in questo caso vale  $mvr$ , è quantizzato, e precisamente assume valori che sono multipli interi positivi di una costante fondamentale, che vale  $\frac{h}{2\pi}$ , dove  $h$  è la costante di Planck”.

Qui bisogna spiegare: la costante  $h$  era stata introdotta alcuni anni prima da Max Planck, altro padre della Meccanica Quantistica, per interpretare effetti fisici connessi alla radiazione elettromagnetica emessa da particolari sorgenti (il cosiddetto corpo nero). Il valore di questa costante è  $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  (verificare che le dimensioni sono giuste!). La costante  $\frac{h}{2\pi}$  viene denotata dai fisici con  $\hbar$ , simbolo introdotto da Dirac che in lingua corrente prende il nome di “acca tagliato”. Con questa notazione l'ipotesi di quantizzazione del momento angolare si può quindi scrivere così:

$$mvr = n\hbar \quad (2.3)$$

con  $n$  numero naturale maggiore di zero (escludiamo che il momento angolare sia nullo; in quel caso l'elettrone dovrebbe "cadere" sul nucleo e l'atomo "collapserebbe", cosa non osservata sperimentalmente).

Il sistema di equazioni costituito dalla (2.2) e dalla (2.3) ha due incognite  $r$  e  $v$ , con  $n$  come parametro. Se ricavo  $v$  dalla (2.3) e la sostituisco nella (2.2) ottengo per  $r$ :

$$r_n = \frac{\hbar^2}{kme^2} \cdot n^2 = a_0 \cdot n^2 \quad (2.4)$$

Ho chiamato il raggio delle orbite circolari ammesse dal calcolo  $r_n$  perché come si vede dipende da  $n$ , come del resto il momento angolare. Come si vede e come a questo punto ci potevamo aspettare, dunque anche il raggio dell'orbita è quantizzato (!) ed è proporzionale a  $n^2$ . Nella (2.4) ho chiamato la costante di proporzionalità

$a_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2}$ , che è detto raggio di Bohr e vale  $a_0 = 0.53 \cdot 10^{-10} m$ ; tale valore fornisce

l'ordine di grandezza delle dimensioni dell'atomo di idrogeno ed è utilizzato regolarmente dai fisici per stimare le dimensioni di un atomo qualsiasi (in effetti l'atomo di idrogeno è il più piccolo ma almeno per l'ordine di grandezza ci possiamo fidare di questa stima).

A tale proposito vale la pena di ricordare l'unità di misura adoperata comunemente dai fisici che si occupano di atomi e molecole: si chiama Angstrom (in sigla  $\text{\AA}$ ) ed è definito dalla seguente equivalenza:  $1\text{\AA} = 10^{-10} m$ , per cui il raggio di Bohr corrisponde a circa mezzo Angstrom.

Tornando alla (4), le orbite circolari dell'elettrone possono avere solo particolari raggi:  $r_1 = a_0; r_2 = 2^2 \cdot a_0 = 4a_0; r_3 = 3^2 \cdot a_0 = 9a_0$  e così via... Un raggio come  $r = 3a_0$  o  $r = 5a_0$  è proibito dalla nuova Meccanica anche se del tutto possibile secondo le leggi di Newton (posso portarmi su un raggio maggiore aumentando a piacere il modulo della velocità, cioè variando il momento angolare...). Il problema è che ora, secondo Bohr, proprio al momento angolare non è consentito assumere valori di modulo arbitrario ma solo quelli dettati in modo "spietato" dalla (2.3).

Dobbiamo ora tirare le somme sull'altra grandezza fisica fondamentale (forse la più importante di tutte) che non è ancora entrata nel problema: l'energia totale  $E$  dell'elettrone nel campo del protone. Ovviamente si può scrivere:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{e^2}{r} \quad (2.5)$$

Usiamo ora la (2.2): semplificando si ottiene  $k\frac{e^2}{r} = mv^2$  da cui

$$E = \frac{1}{2}k \frac{e^2}{r} - k \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}k \frac{e^2}{r} \quad (2.6)$$

Faccio notare che dalla (2.6) si ha  $E < 0$  e che nel caso di orbite circolari  $E = \frac{1}{2}U$ , dove  $U$  è l'energia potenziale dell'elettrone nel campo del protone, e  $E_c = -\frac{1}{2}U$ .

Ora sostituendo la (2.4) nella (2.6) si ottiene finalmente

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{\left(\frac{\hbar^2}{kme^2}\right)} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \frac{k^2me^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{R}{n^2} \quad (2.7)$$

La costante  $R = \frac{k^2me^4}{2\hbar^2}$  è detta costante di Rydberg; usando l'unità di misura  $eV$  e

sostituendo le costanti fondamentali che compaiono in  $R = \frac{k^2me^4}{2\hbar^2}$ , otteniamo il valore

numerico  $R = 13.6eV$ . La formula (2.7) è importantissima in fisica atomica: a dispetto del modello un po' "abborracciato" dal quale l'abbiamo ricavata, è capace di interpretare molti dati sperimentali e risulta valida per l'atomo di idrogeno anche nell'ambito della Meccanica Quantistica (non relativistica) "definitiva" di Heisenberg e Schrodinger. Come si vede dalla (2.7),  $E$  è inversamente proporzionale al quadrato di  $n$ , che è detto numero quantico principale; la minima energia dell'elettrone atomico si ha per  $n=1$  e vale  $E_1 = -R = -13.6eV$ . La Meccanica Quantistica prevede, per atomi comunque complessi, dei valori di  $E$  (detti in generale livelli energetici dell'atomo) dipendenti da più numeri quantici (forse vi è stata data qualche informazione nel Corso di Chimica, ma è sinceramente proibitivo entrare davvero nei dettagli dell'argomento!); possiamo accontentarci di questa descrizione dell'atomo di idrogeno, che per fortuna è descritto dal solo numero quantico  $n$  con una formula semplice come la (2.7).

Tornando alla (2.7), il livello (con  $n=1$ ) di minima energia prima citato viene detto livello fondamentale; l'energia cresce poi con  $n$ , e i livelli con  $n > 1$  si dicono livelli eccitati; l'energia poi tende a 0 per  $n$  tendente all'infinito. In quella condizione l'elettrone abbandona il nucleo e l'atomo si riduce al solo protone (l'atomo si dice ionizzato).

Abbiamo detto che la (7) verifica molti dati sperimentali: vale la pena concludere questa breve trattazione, altrimenti veramente molto "monca", con dei semplici elementi di spettroscopia dei gas (tecnica citata spesso anche nel corso di Scienza della Terra parlando di Cosmologia, per cui credo che l'intervento non guasti..) nella quale la teoria di Bohr fu messa alla prova con notevole successo. Prima di farlo ci manca ancora da chiarire il problema, suscitato dai risultati di Maxwell, della stabilità delle dimensioni di un atomo nonostante l'irraggiamento di un'onda elettromagnetica. Bohr risolse momentaneamente il problema evitandolo....Postulò cioè che un atomo, trovandosi in una delle orbite

circolari di raggio dato dalla (2.4) , non irraggia (questa, e Bohr lo sapeva benissimo, era un'ipotesi arbitraria e poco convincente fisicamente); solo compiendo una transizione da un'orbita all'altra l'atomo può emettere luce ma anche assorbirla, modificando la propria energia. Chiamando  $n_1$  il numero quantico della prima orbita e  $n_2$  quello della seconda, la variazione di energia dell'elettrone sarà ovviamente

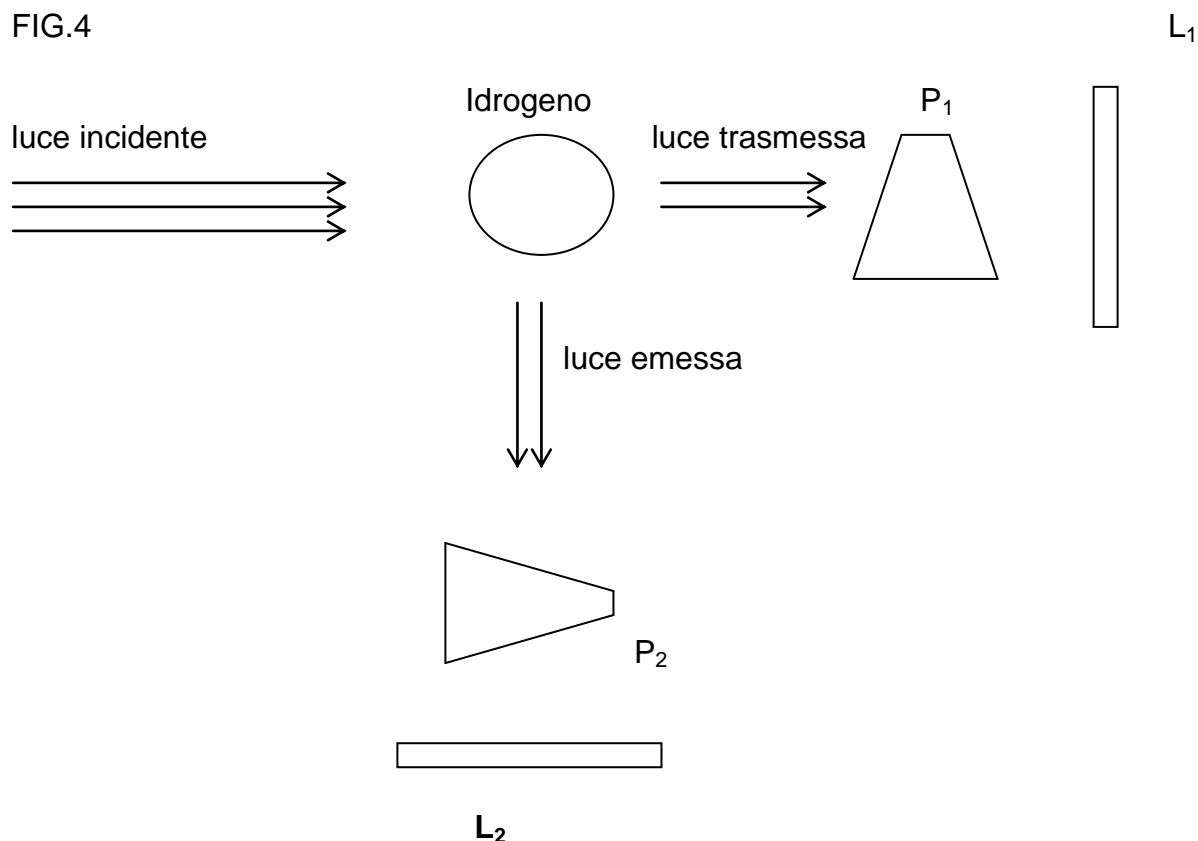
$$\Delta E = -\frac{R}{n_2^2} + \frac{R}{n_1^2} \quad (2.8)$$

Si noti che se  $n_1 > n_2$  ,  $\Delta E < 0$  e che se  $n_1 < n_2$  ,  $\Delta E > 0$  ; come è evidente a priori, l'atomo può perdere o guadagnare energia a seconda che  $n$  diminuisca o aumenti. Nel primo caso si ha emissione di radiazione elettromagnetica, tipicamente per un atomo luce visibile o ultravioletta, nel secondo caso assorbimento.

Chiariremo ora ulteriormente la questione discutendo la schematizzazione di un apparato sperimentale utile al nostro studio. Studieremo ovviamente atomi di idrogeno, visto che è l'elemento più semplice e soprattutto è l'unico di cui sappiamo dire qualcosa. Consideriamo a questo scopo l'apparato sperimentale in figura 4 a pagina seguente: un fascio di luce bianca, contenente cioè un'ampia gamma di frequenze (dall'infrarosso all'ultravioletto) , incide su un campione di atomi di idrogeno, allo stato gassoso, contenuti nel palloncino schematizzato in figura. E' possibile misurare le frequenze assorbite facendo passare la luce trasmessa attraverso il prisma  $P_1$  , che devia la luce incidente su di esso ad angoli diversi in quanto l'indice di rifrazione, in questo caso del vetro di cui è costituito il prisma, dipende dalla frequenza: è il fenomeno della dispersione della luce. La luce emergente oltre il prisma impressiona la lastra fotografica  $L_1$  , che presenta varie righe scure, corrispondenti alla luce assorbita: le posizioni di tali righe permettono di calcolarne le frequenze  $\nu$  , che sono ben precise e che costituiscono il cosiddetto spettro di assorbimento dell'idrogeno e sono una specie di "carta di identità" , che permette di riconoscere questo elemento anche in presenza di altri. Per rivelare la radiazione emessa, la osserviamo in direzione ortogonale a quella assorbita, per non esserne disturbati, con apparato sperimentale analogo: un prisma  $P_2$  che seleziona le frequenze emesse, e una lastra fotografica  $L_2$  che le misura (vedi ancora fig.4). Su  $L_2$  troveremo un certo numero di righe stavolta colorate (le frequenze dello spettro di emissione) scoprendo che sono più numerose di quelle dello spettro di assorbimento; le righe di assorbimento sono comunque tutte presenti nello spettro di emissione, che però ne contiene anche altre.



FIG.4



Voglio far notare che ho disegnato in fig. 4 solo dei simboli per le due lastre fotografiche: nella prima ci dovrebbero essere righe scure su uno sfondo colorato, nella seconda delle righe colorate su uno sfondo scuro.

Gli sperimentatori che per primi ottennero questi risultati ,cercarono e trovarono delle relazioni matematiche tra le frequenze trovate, ma ci voleva qualcuno che interpretasse queste leggi empiriche, motivando lo strano comportamento degli atomi nell'assorbire ed emettere solo alcune ben precise frequenze.

L'ipotesi (1.2) di Einstein fu fatta propria da Bohr: la variazione dell'energia dell'atomo durante la transizione, data dalla (2.8), deve essere proprio uguale all'energia del fotone emesso (o assorbito):

$$\Delta E = h\nu \quad (2.9)$$

Le frequenze che si possono determinare dalla (2.9) attribuendo ai due numeri quantici tutti i possibili valori naturali (che sono infiniti...) sono, nel caso dell'idrogeno, tutte quelle compatibili con la conservazione e con la quantizzazione dell'energia; le frequenze degli spettri di assorbimento e di emissione finora misurati per l'idrogeno fanno tutte parte dell'insieme dei valori dati dalla (2.9). E' un risultato di grande importanza, che avvalora senz'altro le ipotesi di Bohr, pur perfettibili (cosa, come già detto, fatta da altri pochi anni dopo). Non mi posso addentrare in ulteriori particolari perché ciò comporterebbe di uscire dalla teoria di Bohr, che più di tanto non può ottenere. Concludo chiarendo solo una questione rimasta in sospeso: perché lo spettro di emissione è più ricco di quello di assorbimento? Gli sperimentatori si accorsero che ciò avveniva perché le frequenze assorbite erano solo quelle per le quali  $n_1 = 1$  nella (2.9). Ciò significa che sono solo gli atomi nel livello fondamentale ad assorbire un quanto della luce incidente; questi atomi, una volta compiuta la transizione ad un livello eccitato, emettono uno o più fotoni ritornando in tempi brevissimi al fondamentale. Adoperando concetti di Fisica Statistica si

può provare che a temperature non troppo alte, come è quella del nostro esperimento, la probabilità che il campione di idrogeno contenga atomi in livelli eccitati è troppo bassa per avere transizioni con  $n_1 > 1$  in numero sufficiente da misurarne la frequenza; questo comportamento statistico spiega la differenza osservata tra spettro di emissione e spettro di assorbimento.

### 3 ) Raggi X e riflessione di Bragg

Nel paragrafo precedente abbiamo imparato che le energie coinvolte nei processi di scambio energetico tra atomi e radiazione sono, almeno nel caso dell'idrogeno, al massimo dell'ordine di  $10 \text{ eV}$ , che corrispondono a fotoni nelle regioni che vanno dall'infrarosso all'ultravioletto. Consideriamo ora l'apparato sperimentale schematicamente descritto in fig. 5.

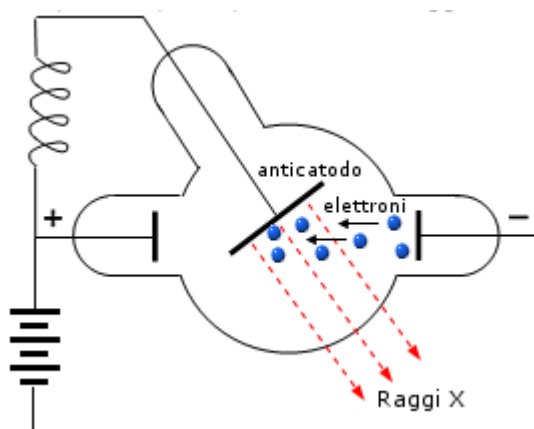


Fig. 5

Si tratta di un tubo catodico con differenze di potenziale tra anodo e catodo molto alte; collegato all'anodo c'è un terzo elettrodo detto **anticatodo**, di un metallo con alto numero atomico  $Z$ . Tale apparato fu concepito e realizzato da W. Roentgen nel 1895 utilizzando differenze di potenziale di circa  $30 \text{ kV}$  e un anticatodo di tungsteno ( $Z=74$ ).

In generale ogni elettrone emesso dal catodo raggiunge l'anticatodo, se  $V_0$  è la tensione tra anticatodo e catodo, con energia cinetica  $eV_0$  (facendo riferimento al caso numerico in questione,  $30 \text{ keV}$ ); queste energie sono assorbite dall'anticatodo con meccanismi non banali, dando luogo all'emissione di radiazione elettromagnetica con due modalità che ci limitiamo a descrivere brevemente:

1 ) **Radiazione da frenamento**: è spiegabile classicamente come la radiazione emessa dal *frenamento* (Bremsstrahlung) degli elettroni che impattano sull'anodo. Infatti una carica in moto accelerato irraggia e il frenamento successivo all'impatto produce fotoni con lunghezze d'onda diverse. Maggiore è l'energia ceduta, minore è la lunghezza d'onda dei fotoni prodotti; lo spettro di tale radiazione è continuo.

2 ) **Spettro caratteristico**: a differenza del primo, lo spettro è discreto, quindi consiste in picchi di frequenze ben definite. L'esistenza di questi picchi è interpretabile come conseguenza della collisione di un elettrone molto energetico con un elettrone interno dell'atomo del bersaglio, collisione che comporta l'espulsione dell'elettrone dall'atomo. Gli elettroni rimanenti compiono transizioni per colmare la lacuna, emettendo fotoni con

energia pari alla differenza tra i livelli. Tale differenza dipende dal tipo di materiale costituente il bersaglio, da cui il nome “spettro caratteristico”.

Osserviamo che ognuna delle due modalità di emissione comporta un vincolo per le frequenze dei fotoni emessi dall'anticatodo: ognuno di essi deve avere frequenza  $\nu \leq \frac{eV_0}{h}$  in quanto l'energia cinetica massima a disposizione è quella di un elettrone, cioè  $eV_0$ .

Roentgen e i suoi collaboratori avevano bisogno di chiarire la natura di questi raggi (che Roentgen stesso chiamò appunto **raggi X** in quanto sconosciuti): si sapeva solo che erano altamente penetranti, si muovevano in linea retta, erano capaci di impressionare una lastra fotografica, ma non si misurava per essi nessun fenomeno legato alle caratteristiche di una radiazione elettromagnetica, come riflessione, rifrazione o diffrazione.

Gli inglesi W. H. Bragg (padre) e W. L. Bragg (figlio) condussero nel 1913 esperimenti con i raggi X e vari cristalli reperibili in natura. L'anno prima il tedesco M. von Laue aveva condotto esperienze sulla diffrazione dei raggi X trattando un cristallo come reticolo di diffrazione tridimensionale; costruì contemporaneamente una complessa teoria generale, con il calcolo dell'interferenza di tutti i centri di diffrazione del reticolo, che giustificava i risultati sperimentali da lui ottenuti.

I Bragg immaginarono il fenomeno in termini di riflessione dei raggi X da parte di una famiglia di piani reticolari paralleli e equidistanti. In quest'approccio i piani reticolari sono immaginati semiriflettenti, i raggi X incidono su un piano e vengono in parte riflessi, in parte trasmessi; la riflessione avviene in accordo con le leggi dell'ottica geometrica. Con queste ipotesi (vedi fig. 6) si ha interferenza costruttiva tra due piani adiacenti (come tra le fenditure di un normale reticolo di diffrazione) se

$$2d \sin \theta = m \lambda \quad (3.1)$$

con  $m$  intero,  $d$  distanza tra i piani e  $\lambda$  lunghezza d'onda del fascio incidente.

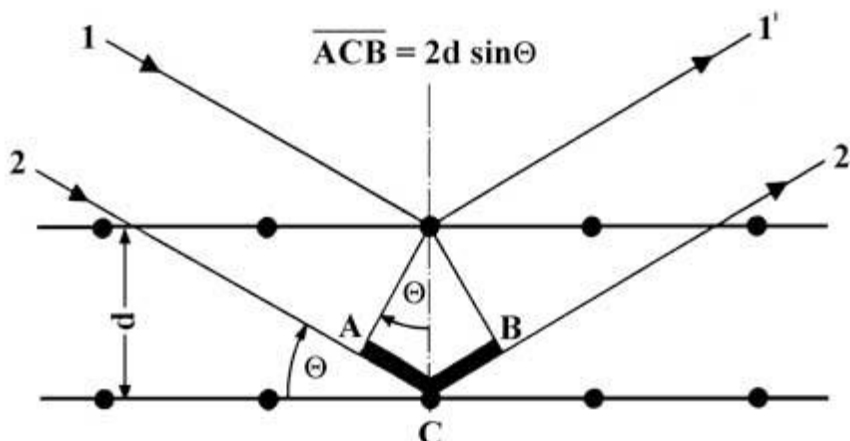


Fig. 6

La (3.1) è coerente con la teoria di von Laue ma è, come si è appena visto, molto più semplice da ricavare; evidentemente il parametro  $d$ , che ha il significato di passo reticolare, è dell'ordine di grandezza delle dimensioni atomiche ( $d \approx 1\text{Å}$ ). Poiché dalla (3.1)  $\lambda < 2d$ , ci volevano proprio i raggi X per misurare il passo reticolare dei cristalli. Utilizzando con successo la (3.1) i Bragg (insieme a von Laue) provarono finalmente che i raggi X sono radiazioni elettromagnetiche, ma hanno una lunghezza d'onda di alcuni ordini di grandezza minore di quella della luce visibile.

I Bragg ricevettero entrambi il premio Nobel nel 1915 per le loro ricerche sulla diffrazione dei raggi X nei cristalli; Bragg figlio è stato (finora...) il più giovane a ricevere il premio Nobel (a 25 anni).

#### 4 ) Effetto Compton

Nel 1922 l'americano A. Compton realizzò una serie di misure utilizzando i raggi X, le cui conoscenze tecniche si erano man mano perfezionate negli ultimi decenni. Compton studiò gli urti tra un fascio ben collimato (cioè di direzione ben definita) di raggi X con un bersaglio di grafite. L'energia dei fotoni incidenti valeva circa  $18\text{ keV}$ ; la corrispondente lunghezza d'onda era comunque misurabile con ottima approssimazione dall'apparato sperimentale utilizzato da Compton. Inoltre la grafite è un cristallo costituito da atomi di carbonio, avente in questa forma alta conducibilità elettrica. Furono misurate accuratamente la lunghezza d'onda dei fotoni incidenti, quella dei fotoni emessi dopo l'urto (diffusi) e l'angolo  $\theta$  di diffusione (vedi fig. 7)

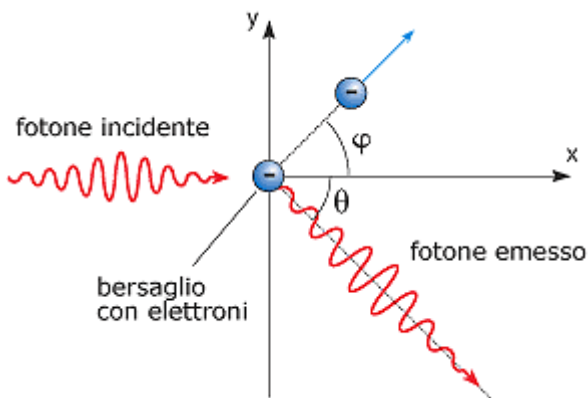


Fig. 7

L'idea della misura era quella di verificare le ipotesi di urto elastico tra un fotone incidente e un elettrone del bersaglio di grafite, considerato quasi libero (si pensi alle proprietà metalliche della grafite con la sua alta conducibilità e ai valori del lavoro di estrazione dell'ordine di qualche elettronvolt, del tutto trascurabile rispetto all'energia del fotone incidente che è  $18\text{ keV}$ ).

Nelle ipotesi di urto elastico fotone-elettrone, con l'applicazione diretta della teoria della relatività del capitolo precedente imponendo la conservazione dell'energia e dell'impulso in tale urto, si ottiene, come ora vedremo, una relazione matematica tra lunghezza d'onda dei fotoni incidente e diffuso e angolo di diffusione. Compton misurò questi tre parametri e li mise a confronto con le previsioni teoriche; questa misura era quindi di enorme valore

per la coerenza dei postulati della “giovane” (aveva meno di 20 anni...) teoria della Relatività.

Vediamo brevemente di impostare il calcolo dell’urto (si usano anche altri termini equivalenti, come “diffusione” e “scattering”) fotone-elettrone.

Chiamiamo  $\lambda$  la lunghezza d’onda del fotone incidente e  $\lambda'$  quella del fotone diffuso; chiamiamo  $E_e$  e  $p_e$  rispettivamente energia e modulo dell’impulso dell’elettrone dopo l’urto, chiamiamo infine banalmente  $m$  (non ci sono ambiguità...) la massa dell’elettrone e come già detto  $\theta$  l’angolo di diffusione. Dalla relazione tra energia e impulso per l’elettrone dopo l’urto otteniamo:

$$E_e^2 = p_e^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (A)$$

Dalla conservazione dell’energia del sistema fotone elettrone otteniamo:

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e \quad (B)$$

Dalla conservazione dell’impulso del sistema fotone elettrone, applicando il teorema di Carnot al triangolo in fig 8 otteniamo:

$$p_e^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2 \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{h}{\lambda'} \cdot \cos\theta \quad (C)$$

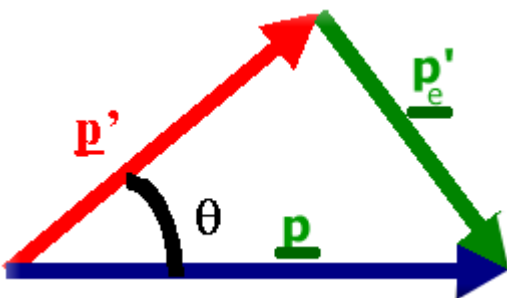


Fig. 8

ricordando che per i fotoni  $E = \frac{hc}{\lambda}$  e  $p = \frac{h}{\lambda}$ .

Ricavando  $E_e$  dalla (A), quadrando (la parte più noiosa ma provate almeno una volta...) e sostituendo insieme a  $p_e^2$  della (C) nella (A) si ottiene:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (3.2)$$

La (3.2) è un risultato semplice e estremamente interessante: esaminiamola brevemente. Poiché nello scattering il fotone cede energia all’elettrone mettendolo in moto, la sua energia deve diminuire e quindi la lunghezza d’onda deve aumentare, da cui  $\lambda' > \lambda$ . In questo caso poi la differenza  $\lambda' - \lambda$  non dipende da  $\lambda$  ma solo dall’angolo di diffusione  $\theta$  e dalla grandezza ottenuta combinando costanti fondamentali e detta **lunghezza d’onda Compton** per l’elettrone (qui ho messo il pedice alla massa dell’elettrone  $m$ ):

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \quad (3.3)$$

Si ha  $\lambda_C = 2.43 \cdot 10^{-12} m$  ; il piccolo valore di  $\lambda_C$  rispetto alle lunghezze d'onda  $\lambda$  utilizzate da Compton richiedeva per la verifica della (3.2) un apparato sperimentale molto affidabile e preciso. In realtà le misure di Compton (che gli valsero il premio Nobel nel 1927) verificarono con buona approssimazione la (3.2) per diversi valori dell'angolo  $\theta$  ; un successo sperimentale così netto portò Einstein alla seguente affermazione:

“il risultato positivo dell'esperimento di Compton dimostra che la radiazione si comporta come se consistesse di proiettili di energia discreta, non solo per quanto riguarda il trasferimento di energia ma anche per quanto riguarda il trasferimento di quantità di moto.”

## 5 ) Lunghezza d'onda dell'elettrone e esperimento di Davisson e Germer

Torniamo al nuovo assetto che la Dinamica relativistica ha configurato per le onde elettromagnetiche con il loro carattere corpuscolare. Questa visione rivoluzionaria si è rivelata del tutto coerente con l'effetto Compton appena descritto; in particolare, per il fotone oltre all'energia è stata definita la quantità di moto (che ormai per uso invalso chiameremo impulso) il cui modulo vale  $p = \frac{h}{\lambda}$ .

Il francese L. De Broglie nel 1923 (a 22 anni...) formulò un'ipotesi a partire dalla sua formula inversa, cioè

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.1)$$

detta appunto **lunghezza d'onda di De Broglie**. De Broglie provò ad attribuire un significato alla (5.1) per una particella di massa  $m > 0$ , per fissare le idee un elettrone di massa  $m_e$ ; supponiamo per semplicità di trattare il caso non relativistico, vedremo che nelle nostre applicazioni ci troveremo proprio in questo caso. Pensando ancora per semplicità ad un moto rettilineo, dalla (5.1) si avrebbe:

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} \quad (5.1 \text{ bis})$$

(continuo a usare il simbolo per la massa dell'elettrone ma ovviamente la formula si può usare per qualsiasi particella di massa  $m > 0$ ).

La (5.1 bis) definisce (qualunque cosa ciò voglia dire...) una lunghezza d'onda per una particella massiva in moto con velocità di modulo  $v$ . Come “esercizio di stile” è una cosa ineccepibile, ma, ripetiamo, occorre essere capaci di interpretare in qualche modo la cosa. Dovremmo soprattutto mettere alla prova la (5.1 bis) con qualche esperienza di fisica delle particelle in moto. Per prima cosa, sempre riferendosi ad elettroni che sono le particelle più abbondanti e semplici da maneggiare in natura, pensiamo al solito al loro moto in un tubo catodico, sotto vuoto, con l'applicazione di un campo elettrico e con partenza da fermo (il che costituisce una buona approssimazione per elettroni emessi da un filamento riscaldato). Sempre in approssimazione non relativistica si ha per l'energia acquistata dagli elettroni sotto l'azione del campo elettrico la ben nota formula:

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (5.2)$$

Ricavando  $v$  dalla (5.1 bis) e sostituendo nella (5.2) e passando alle radici quadrate si ottiene:

$$\lambda\sqrt{E} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2}} \quad (5.3)$$

Espressa la costante a secondo membro (costruita anch'essa con costanti fondamentali) nelle unità naturali della fisica atomica si trova la "sorella gemella" della (15) del capitolo sulla dinamica relativistica, che riporto qui per comodità

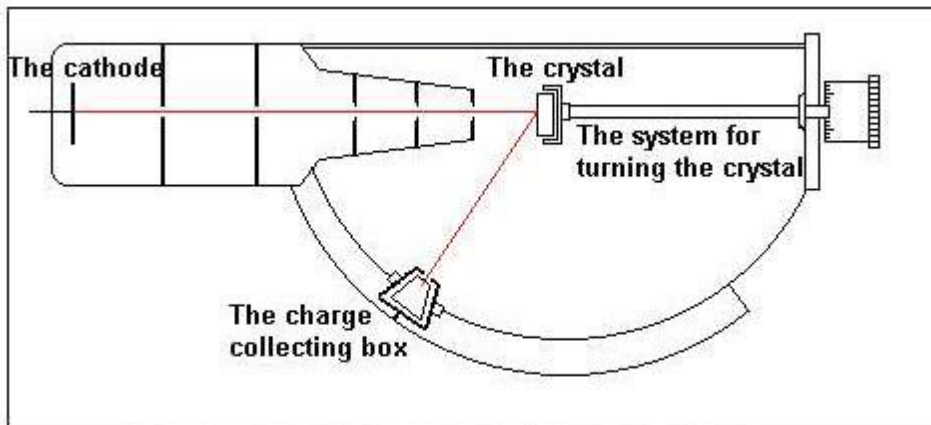
$$\lambda \cdot E = 12400 \text{ (eV} \cdot \text{Å)} \quad (15)$$

$$\lambda \cdot \sqrt{E} = 12.4 \text{ (\sqrt{eV} \cdot Å)} \quad (5.3 \text{ bis})$$

(notiamo che per avere una  $\lambda$  dell'ordine di  $1 \text{ Å}$  è sufficiente accelerare un elettrone con una ddp dell'ordine di  $100 \text{ V}$  )

Teniamo per un attimo ferme la (5.3) e immaginiamo qualche caso fisico concreto in cui si evidenzi una natura ondulatoria degli elettroni. Abbiamo imparato al par. 3 che i raggi X , con  $\lambda$  dell'ordine delle dimensioni atomiche, manifestavano un comportamento ondulatorio (abbiamo brevemente analizzato la riflessione di Bragg). Gli americani Davisson e Germer a partire dal 1925 condussero ricerche di diffusione di elettroni da solidi. Nel 1927, utilizzando polveri di Nichel, in seguito a un guasto dell'apparato, nel ripristinarlo vi rimase Nichel allo stato cristallino; riuscirono allora a vedere qualcosa di completamente inaspettato (colpo di fortuna...!)

Vale la pena descrivere l'apparato sperimentale che usarono (vedi fig. 9).



**The diagram for the Davisson-Germer experiment.**

Fig. 9

Elettroni accelerati da una tensione variabile erano mandati sul cristallo con incidenza normale e il rivelatore delle cariche eventualmente diffuse poteva essere ruotato appunto per trovare possibili direzioni preferenziali di elettroni dopo l'urto..

Già che siamo alla follia di descrivere il comportamento di particelle come se fossero onde, proviamo ad usare la teoria di Bragg per descrivere ciò che si osservava.

Facciamo riferimento alla figura 10:

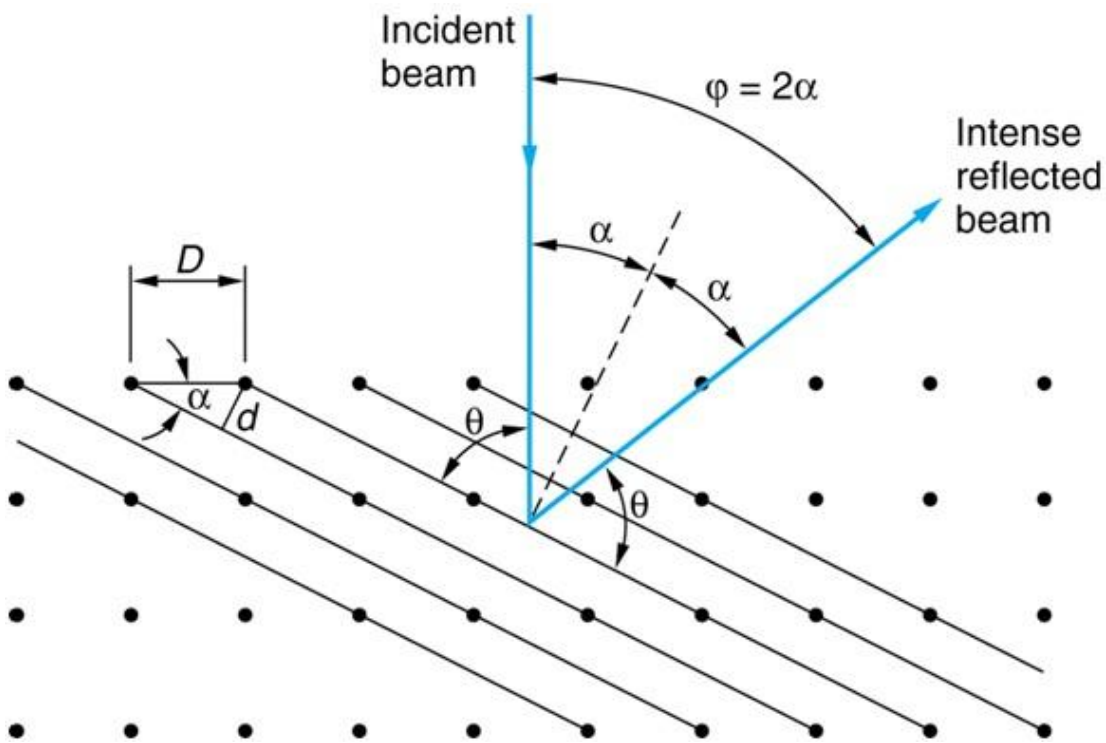


Fig. 10

Si considera qui per semplicità, come fatto anche in fig. 6 , un reticolo cubico semplice: con incidenza normale, occorre però cambiare le famiglia di piani reticolari per scrivere la condizione di massimo di interferenza in una forma diversa da quella della (3.1).

Con la notazione in fig. 10 , usando la famiglia di piani posta trasversalmente, la condizione per avere un massimo di intensità si ha ancora usando la (3.1) , con distanza  $d$  tra i piani scelti, ma l'effettiva distanza reticolare è qui indicata con  $D$  , che è quella calcolata in cristallografia e misurata mandando raggi X trasversalmente "alla Bragg" come al paragrafo 3 . La (3.1) fornisce la condizione di massimo, che riscriviamo con la notazione di fig. 10 :

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (5.4)$$

Ma poiché, come si vede in figura,  $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$  ; inoltre per definizione di seno

$$D \sin \alpha = d \quad (5.5)$$

e sostituendo nella (5.4) si ottiene

$$2D \sin \alpha \sin \theta = 2D \sin \alpha \cos \alpha$$

da cui infine, ponendo (vedi ancora fig. 10)  $\varphi = 2\alpha$  angolo di deflessione

$$D \sin \varphi = m\lambda \quad (5.6)$$



Davisson e Germer conoscevano il passo reticolare del Nichel che vale  $D = 2.15 \text{ \AA}$  ; con il loro apparato di fig. 9 rivelarono molto nettamente un fascio riflesso ad angolo  $\varphi = 50^\circ$  quando applicavano la tensione di  $54 \text{ V}$  (vedi fig. 11) .

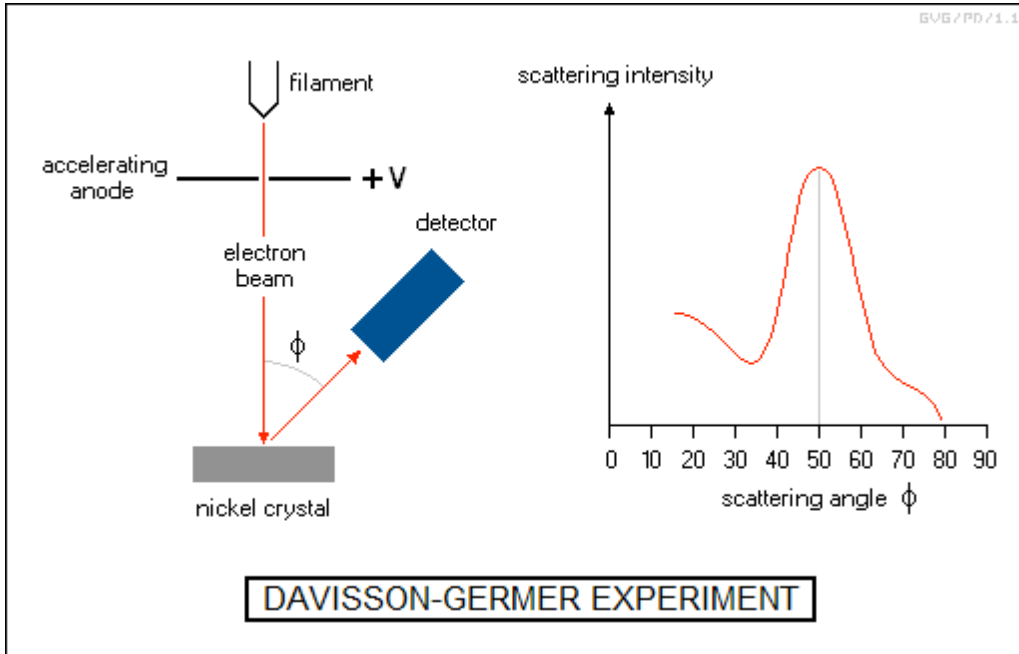


Fig. 11

Dalla (5.3 bis) per  $E = 54 \text{ eV}$   $\lambda$  vale  $1.67 \text{ \AA}$  . Con i dati sopra riportati per  $D$  e  $\varphi$  , la (5.6) è per  $n = 1$  (massimo del primo ordine) in buon accordo con i dati sperimentali!

Si può interpretare la (5.6) come la condizione che fornisce le zone in cui è massima la probabilità di trovare gli elettroni del fascio incidente dopo la deflessione da parte del cristallo. Un'interpretazione "probabilistica" delle proprietà di questa onda "associata all'elettrone" sarà l'idea vincente nella costruzione di una Meccanica che descrive in modo soddisfacente la fisica dei sistemi microscopici. I principi di questa meccanica completamente nuova (**meccanica quantistica**) vennero scoperti proprio nel 1927 dal tedesco W. Heisenberg e dall'austriaco E. Schrodinger e completamente formalizzati (nonché estesi al caso relativistico..!) dall'inglese P. A. M. Dirac.

L'apparato matematico di questa meccanica è estremamente complesso; ho provato a trattarlo in maniera molto semplificata in un altro file che si può trovare sul sito dell'istituto, ma credo che i fatti fisici esplorati finora siano sufficienti per la preparazione all'esame di Maturità.