LEGGI DI OHM E RETI ELETTRICHE.

1) PREMESSA.

Nelle lezioni precedenti abbiamo discusso la proprietà fondamentale di un corpo conduttore in equilibrio elettrostatico: tutti i punti del conduttore sono allo stesso potenziale. Abbiamo anche accennato nell'ultimo paragrafo all'esistenza, peraltro ben nota a tutti, di generatori elettrici (sono per esempio le pile a secco, la batteria dell'auto, i grandi generatori delle centrali elettriche) : questi dispositivi sono capaci di fornire, tra due loro ben precisi punti detti **poli** (o morsetti), una differenza di potenziale ΔV costante nel tempo. In realtà il periodo di funzionamento di un generatore non è infinito, ma ΔV sarà costante per un tempo sufficientemente lungo per ciò che ci interessa.

Se la ddp di un generatore è costante, si chiama **anodo** (o polo positivo) il polo a potenziale maggiore e **catodo** (o polo negativo) il polo a potenziale minore.

La prima questione cruciale che dobbiamo subito affrontare è la seguente: cosa succede se collego i due poli di un generatore a due diversi punti P_1 e P_2 di un conduttore reale, in modo che $V_{P_1} - V_{P_2} = \Delta V$? La risposta immediata è che il conduttore non può raggiungere l'equilibrio elettrostatico, perché lo costringiamo, finché il generatore è in azione, a non essere equipotenziale. Questo significa che della carica elettrica all'interno del conduttore, costituita per i solidi da elettroni di conduzione , deve mettersi in moto e continuare a muoversi per tutto il tempo in cui il generatore agisce.
Supponiamo di avere un conduttore filiforme, con i due poli collegati agli estremi P_1 e P_2 del filo, che possiamo chiamare capi del conduttore; ci immaginiamo allora che le cariche mobili si muovano all'interno del filo percorrendolo come un flusso di auto in una strada. Questa metafora, come forse già sapete dalle scuole medie, è spesso conveniente nel descrivere i fenomeni elettrici, e sarà utilizzata anche in questo capitolo.

Per ottenere un moto permanente con le caratteristiche che per ora abbiamo solo immaginato, occorre che gli elettroni possano però essere in qualche modo "riforniti", cioè possano entrare ed uscire dal conduttore, proprio come delle auto per poter avere un traffico costante in una strada rettilinea. Faccio notare che avremmo potuto pensare di collegare i capi del conduttore alle due armature di un condensatore carico, con una d.d.p. ΔV tra le armature, invece che un generatore; il fatto è che in questo modo il condensatore avrebbe perso la sua carica diminuendo (fino a zero) la d.d.p. ai suoi capi in un tempo molto breve (in genere anche molto minore di $1\mu s$) che calcoleremo in un capitolo successivo. Per l'esattezza, gli elettroni presenti nell'armatura a potenziale minore si sarebbero mossi all'interno del conduttore andando a neutralizzare le cariche positive rimaste nell'armatura a potenziale maggiore, scaricando così il condensatore. Non è possibile quindi, nel sistema condensatore+conduttore, un moto permanente delle cariche; il circuito poi non è chiuso: le cariche non possono compiere un giro completo di esso, perché le due armature del condensatore sono tra loro isolate e bloccano un eventuale trasferimento di carica dall'una all'altra.

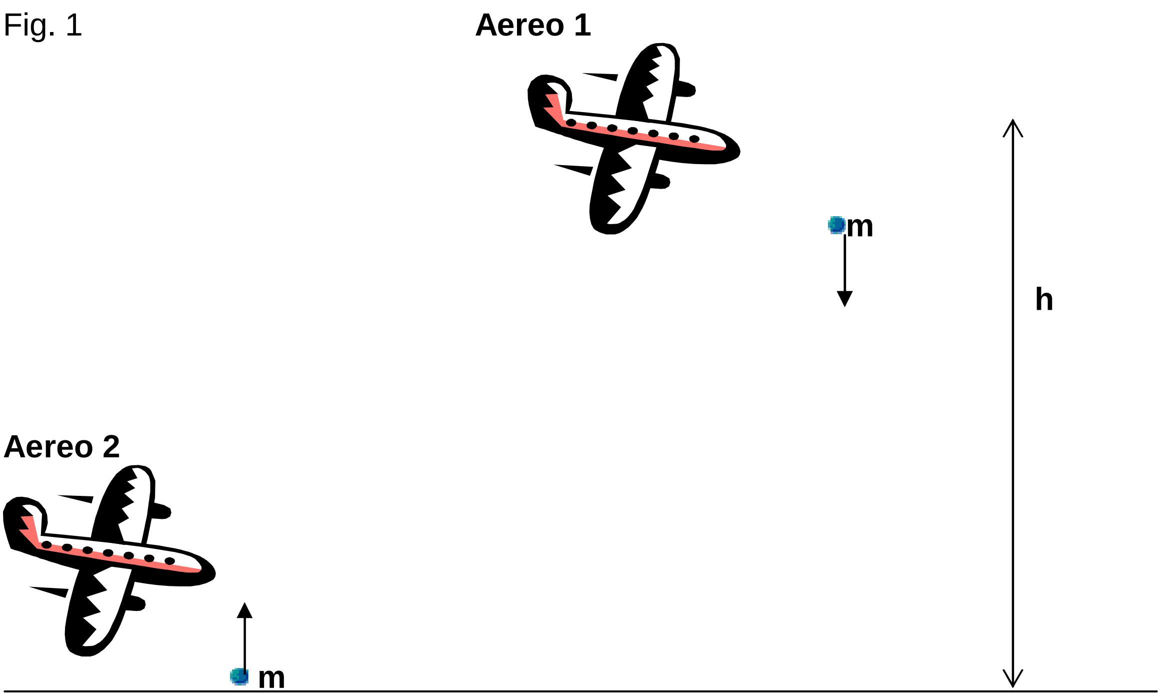
Per una carica in moto in un conduttore (collegato ad un generatore) la possibilità di entrare da un capo ed uscire dall'altro è garantita facilmente se le cariche in moto possono muoversi attraverso un **circuito**, cioè un cammino chiuso come quello di un autodromo. Basta quindi che il conduttore faccia parte di un circuito (il più semplice è come vedremo proprio quello ottenuto collegando solo i poli del generatore ai capi del conduttore) : in questo modo potremo avere un moto permanente di cariche, se il circuito non viene interrotto in qualche punto e fintantoché opera una ddp tra i capi del nostro conduttore.

Questi ed altri fenomeni saranno ora analizzati in dettaglio, partendo da un caso fisico apparentemente lontano dalle nostre "questioni elettriche": vi troveremo delle idee fisiche che ci saranno utili nell'immediato futuro a proposito del moto lungo un circuito.

2) IL PARACADUTISTA E L'ELETTRONE.

Consideriamo un paracadutista di massa m in esercitazione, che dovrà lanciarsi un numero arbitrario di volte da un aereo in volo orizzontale ad una quota h dal suolo. La sua situazione è schematizzata in figura 1:

Fig. 1



Il parà si lancia dall'aereo (lo chiamo in figura "aereo 1") e cade a terra sotto l'azione della gravità e (stavolta) dell'attrito dell'aria; è naturalmente l'analogo del moto del corpo lungo l'ipotenusa del caso precedente, anche se la legge di forza non è quella dell'attrito cinetico, ma approssimativamente del tipo $\vec{F}_a = -\beta\vec{v}$, dove β è una costante e $\vec{v}$ è il vettore velocità del paracadutista. Dopo alcuni secondi viene raggiunta una velocità **costante** $\vec{v}_l$ detta **velocità di regime** o velocità **limite**. Si usa tradizionalmente il pedice l , che sta appunto per "limite"per il nome di questa velocità**;** per i nostri scopi successivi preferiremo comunque usare il nome "velocità di regime". Una velocità costante corrisponde a una forza risultante nulla: $\vec{F} = -\beta\vec{v}_l + m\vec{g} = 0$ da cui $\vec{v}_l = \frac{m\vec{g}}{\beta}$. Tale velocità sarebbe sufficiente a uccidere il parà se questi non avesse il paracadute, che , se usato in modo corretto, lo porterà a diminuire opportunamente la sua velocità nella fase finale del lancio toccando terra senza danni. A questo punto il paracadutista (che ora si è anche dovuto fermare nell'impatto con il terreno, ma trascuriamo questa circostanza accidentale), deve usufruire di una fonte esterna di energia, cioè quello che ho chiamato "aereo 2", che lo riporti alla massima energia potenziale a quota h dal suolo se deve effettuare un eventuale altro lancio; è chiaramente l'analogo di ciò che deve usare il corpo dell'esempio precedente per risalire il cateto verticale. In tutti e due i casi è insomma necessario per colpa dell'attrito un intervento esterno che consenta al circuito di essere percorso di nuovo; in questo ultimo esempio, la forza esterna sarà il risultato dell'azione dei motori dell'"aereo 2".

Ci sono varie analogie tra il moto del paracadutista prima analizzato e quello di una carica in un circuito elettrico. Gli ingredienti sono ora un generatore elettrico e un conduttore non ideale. Vedremo, dopo aver richiamato le caratteristiche di questi due oggetti, che potremo formulare utili analogie: il moto dell'elettrone dentro il generatore è il corrispondente di quello del parà sull'"aereo 2" e il moto dell'elettrone dentro il conduttore corrisponde a quello del parà durante il lancio dall'aereo verso terra.

Occorre intanto approfondire il concetto di **GENERATORE ELETTRICO**, dato che finora ci siamo fidati dell'immagine della "pila" (batteria di accumulatori dell'auto o pila a secco comprata dal tabaccaio) o di quella della presa dove cacciare la spina dell'elettrodomestico. Abbiamo accennato poco fa al fatto che esistono dispositivi capaci di fornire tra due punti ben localizzati (poli o morsetti) una differenza di potenziale (tensione) ΔV, cioè di generare un campo elettrico $\vec{E}$. Abbiamo anche detto che ΔV è costante (almeno per un tempo sufficientemente lungo) per batterie e pile, e variabile nel tempo (in che modo lo vedremo in futuro) per le prese di corrente domestiche e industriali: è la distinzione tra le tensioni continue e quelle alternate.

Nel capitolo precedente abbiamo studiato i campi elettrostatici, generati da distribuzioni di carica ferme nello spazio; ci occuperemo ora per la prima volta di cariche in moto, e per poter fare questo occorre studiare l'elemento di circuito capace di provocare tale moto, che è appunto il generatore. Riportiamo brevemente il concetto di generatore funzionante **a vuoto**. "A vuoto" significa a circuito interrotto: nessun utilizzatore è inserito e quindi non è possibile un moto permanente di cariche . Esistono strumenti, detti **voltmetri,** capaci di misurare la d.d.p. ΔV tra due qualsiasi punti. Un voltmetro detto ideale può misurare la tensione senza che nessun portatore di carica in moto lo attraversi ; possiamo pensare di misurare la ΔV **erogata** dal generatore (è il corretto participio usato nella tecnica per indicare la d.d.p. di un generatore) con un voltmetro ideale, il che vorrà dire misurarla a circuito aperto…. La d.d.p. erogata a circuito aperto (a vuoto) da un generatore viene chiamata FORZA ELETTROMOTRICE, o più brevemente F.E.M.: è un nome infelice, anche se entrato nell'uso comune perché non ha nemmeno le dimensioni di una forza essendo espresso in volts: si indica con la lettera $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ogni generatore ha una sua f.e.m. dipendente dal tipo di meccanismo di conversione dell'energia su cui funziona; prendiamo ora un generatore di f.e.m. ε e alimentiamo un circuito attraverso di esso.

Sappiamo già che in un generatore elettrico esistono due punti terminali (i due poli nei generatori con ε costante) ai quali collegare i conduttori esterni per sottoporli alla ddp: tra i due terminali, all'<u>interno</u> del generatore, le cariche devono muoversi lungo un certo percorso per poter completare il circuito, cioè compiere un giro completo. Disponendo quindi di un generatore e di un conduttore, collegandoli tra di loro possiamo realizzare il più semplice <u>circuito elettrico</u>, che chiameremo **circuito elementare**; si dice anche che il generatore è **chiuso** sul conduttore da noi scelto. Chiudiamo ora il generatore su un conduttore filiforme di lunghezza l e sezione S : in un conduttore **reale** i portatori di carica, per quanto buona sia la capacità del materiale di consentire una circolazione quasi libera di carica al suo interno (si pensi p.es. al rame che è un ottimo conduttore), incontrano una "resistenza" al loro moto, come il parà in caduta trova la resistenza dell'aria. In realtà comprenderete che il paragone non si può spingere troppo in là, perché la conduzione elettrica coinvolge fenomeni che avvengono su scala atomica, e la natura è governata a livello microscopico da leggi fisiche molto particolari, che per ora non accenniamo neppure (**meccanica quantistica**). Proveremo comunque a utilizzare il cosiddetto **modello viscoso** della conduzione elettrica: per un portatore di carica in moto con carica q ipotizzeremo cioè una legge di forza d'attrito (che simula l'interazione con la struttura cristallina del solido che costituisce il materiale conduttore) anche stavolta del tipo $\vec{F}_a = -\beta\vec{v}$ come quella del parà, che naturalmente stavolta si somma vettorialmente alla forza elettrica $\vec{F} = q\vec{E}$. Si otterrebbe ancora una velocità di regime $\vec{v}_l$ tale che $v_l = \dfrac{qE}{\beta}$; l'analogia con la velocità di regime del parà lanciato è evidente. Ora, per essere veramente sicuri che abbia senso parlare di velocità di regime per i portatori di carica nel circuito, occorre definire nuove grandezze elettriche adatte allo scopo, e soprattutto conoscere fatti sperimentali nuovi per mettere alla prova le nostre ipotesi.

3) LA CORRENTE ELETTRICA: INTENSITA' E DENSITA' DI CORRENTE.

Cerchiamo di descrivere nel modo più suggestivo possibile il moto dei nostri portatori all'interno del conduttore filiforme dei paragrafi precedenti. Ogni conduttore possiede cariche mobili sotto l'azione di campi elettrici agenti al suo interno (per esempio il rame ne possiede circa una, un elettrone, per ogni atomo). Supponiamo che ogni portatore abbia carica q e che ci siano ΔN portatori in un dato volume ΔV , con una densità uniforme $n = \dfrac{\Delta N}{\Delta V}$. Ricordiamo, come già accennato, che nei conduttori solidi i portatori sono **elettroni**, di carica $q = -e$. Se tutti i portatori si muovono con modulo della velocità v , possiamo paragonarli ad una fila di veicoli su un'autostrada: il traffico in un dato senso di marcia sarà tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di ogni auto, quanto più vicine sono le auto tra loro (sperando che sia rispettata almeno una distanza di sicurezza….!) e quanto maggiore è il numero di corsie in quel senso di marcia. Se volessimo contare poi proprio il numero di persone in viaggio oltre al semplice numero di veicoli, dovremmo conoscere anche il numero di occupanti di ogni automezzo. Ma cosa si intende effettivamente per "traffico"? Ovviamente dovremmo piazzare un osservatore in un dato punto della carreggiata e fargli contare quante auto (con relativi occupanti) transitano in quel punto in un fissato intervallo di tempo (p.es. un minuto) ripetendo il conteggio ad ore diverse per controllarne gli eventuali cambiamenti (è ragionevole che ve ne siano: ogni strada ha le sue "ore di punta" del traffico). Non è difficile "trasferire" tutti questi concetti al caso delle cariche; diamo subito una definizione fondamentale che costituisce l'analogo elettrico della "misura del traffico".

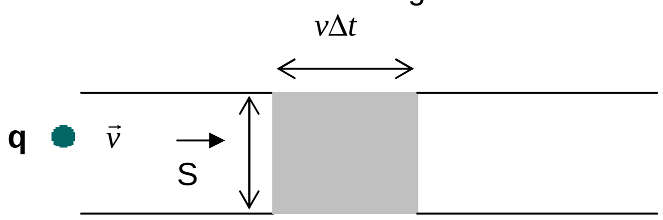
Si dice **intensità di corrente elettrica** (più brevemente, **corrente elettrica**) la quantità

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{3.1}$$

dove ΔQ è la carica che attraversa una qualunque sezione trasversale del circuito di area S nell'intervallo di tempo Δt. Questa nuova grandezza è davvero fondamentale: ha le dimensioni di una carica divisa per un tempo e la sua unità di misura nel sistema MKS è coulomb/secondo, che è detta **ampère**, con sigla A (dal nome di uno scienziato francese della prima metà dell'ottocento, che ritroveremo presto). E' talmente importante che i fisici l'hanno promossa a **quarta unità fondamentale** del sistema internazionale, che è detto infatti **MKSA**. Una osservazione sul fatto che la sezione sia scelta in un punto qualunque del circuito: dato che la carica è una grandezza che **si conserva** (vedi par. 21.6 del libro di testo), se non ci sono "biforcazioni" o "scarichi" nel circuito in cui parte della carica in moto si fermi o si disperda (come ad esempio un'uscita per l'autostrada) la carica che attraversa un punto del circuito in un dato tempo non può cambiare (in un circuito non ci sono ingorghi….); le "biforcazioni" in un circuito sono invece possibili (per esempio inserendo due elementi, come si dice, in parallelo; lo studieremo presto). Faccio notare anche che le nostre correnti sono, come si dice, **neutrali**, cioè in ogni porzione di un conduttore solido la carica dei portatori in moto è sempre compensata da cariche immobili (gli ioni del reticolo cristallino); se ci fosse davvero un ingorgo, cioè un accumulo di portatori, si misurerebbe una carica netta nel circuito con effetti elettrostatici sull'esterno, il che non avviene….

Facciamo ora altre ipotesi sulle nostre cariche in moto: supponiamo che tutti i portatori abbiano identica velocità $\vec{v}$, come già accennato, per non rendere le cose troppo complicate; in realtà dovremmo almeno considerarne una velocità media, ma vogliamo adottare il modello viscoso, che è il più semplice, e ipotesi più raffinate sul moto dei portatori ci costringerebbero a cambiarlo. Le formule che ricaveremo saranno comunque valide attribuendo a $\vec{v}$ il significato di velocità media dei portatori; ritorneremo presto su questo punto. Nella nostra schematizzazione le cariche sono come una fila di auto incolonnate in moto con uguale velocità, diciamo tutte a distanza di sicurezza. Il valore S della sezione è l'analogo del numero di corsie: più grande è, più portatori possono passare. La densità n è l'analogo della distanza di sicurezza tra due veicoli vicini: più grande è, più auto si contano in un fissato tratto di strada. Infine, la carica q di ogni portatore è l'analogo del numero di occupanti del veicolo: diciamo che se il portatore ha una carica elementare, come nel caso dei conduttori solidi, è come se ogni veicolo fosse occupato solo dal conducente. Questi paragoni "ingenui" servono però a rendersi meglio conto della situazione fisica; ora ricaveremo senza troppe difficoltà la relazione tra la I definita nella (4.1) e le quattro grandezze di poco fa. Calcoliamo la ΔQ che attraversa la sezione S nel tempo Δt usando la (3.1) e aiutandoci con la figura 2, che rappresenta la sezione di una porzione di circuito di forma cilindrica con un piano passante per l'asse del cilindro.

Figura 2



La carica che ha attraversato la sezione S in questo intervallo di tempo è tutta contenuta nel cilindretto (evidenziato con l'area ombreggiata in fig. 2) di volume $\Delta V = Sv\Delta t$. Per definizione di n , si ha che il numero di portatori contenuti nel volumetto vale $\Delta N = n\Delta V = nSv\Delta t$. Poiché $\Delta Q = q\Delta N$, si ricava

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqSv \qquad (3.2)$$

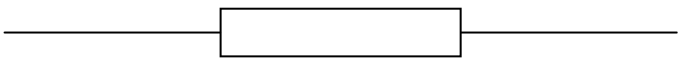
La (3.2) è una relazione fondamentale, che ci sarà subito molto utile. Essa ci suggerisce subito un'altra definizione importante, che è quella di **densità di corrente**, definita come

$$\vec{J} = nq\vec{v} \qquad (3.3)$$

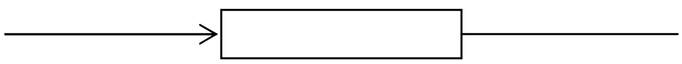
A differenza di I , $\vec{J}$ è un vettore, che ha il verso della velocità media $\vec{v}$ se i portatori sono carichi positivamente. In realtà una definizione più esatta di I parte proprio da quella di $\vec{J}$, ed è la seguente: si fissa arbitrariamente una orientazione della sezione scegliendo al solito uno dei versi nella direzione ad essa ortogonale; si definisce poi I come la grandezza <u>scalare</u>

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S} \qquad (3.4)$$

cioè l'intensità di corrente è il flusso del vettore densità di corrente. I ha segno positivo se $\vec{J}$ ha lo stesso verso di $\vec{S}$; in sostanza la scelta del verso di $\vec{S}$ corrisponde alla scelta (arbitraria) del verso convenzionale di percorrenza del conduttore.
E' importante chiarire questo punto: ci aiutiamo a farlo introducendo uno dei possibili simboli utilizzati normalmente per disegnare i circuiti elettrici, che è appunto quello di un conduttore. Si può disegnare semplicemente come un rettangolo allungato, come in figura:



I due segmenti disegnati sui lati del rettangolo simboleggiano i due collegamenti con l'esterno: questi sono tipicamente due fili metallici e nel circuito elementare sono ovviamente collegati ai poli di un generatore. Abbiamo detto parlando della sezione del conduttore che fissare il verso del vettore $\vec{S}$ significa scegliere un verso di percorrenza del conduttore; tale verso potrà essere contrassegnato, nel simbolo prima disegnato, con una semplice freccia su uno dei due fili di collegamento, come nell'altro disegnino qui sotto:



L'intensità di corrente I nel conduttore del disegno sarà positiva se il verso del vettore $\vec{J}$ è da sinistra verso destra. Lo studio delle proprietà di questo vettore è quindi un punto cruciale della nostra trattazione: ad esso ci dedicheremo nel paragrafo seguente.

4) LE LEGGI DI OHM

Date queste fondamentali definizioni, è arrivato finalmente il momento di conoscere cosa succede sperimentalmente considerando il circuito elementare, cioè chiudendo un generatore di f.e.m. ε su un conduttore **reale** di sezione S e di lunghezza l , che chiameremo anche RESISTORE. E' possibile misurare l'intensità di corrente I che scorre nel conduttore; lo strumento che la misura si chiama **amperometro** e impareremo a conoscerlo e a usarlo in laboratorio. Il primo dato sperimentale è questo: la corrente misurata per una data ε è **costante**, cioè lo strumento fornisce un'indicazione che non cambia nel tempo. Questo significa che per la (4.2) il modulo v della velocità media dei portatori è costante essendo ovviamente costanti le altre grandezze presenti nella formula: la velocità di regime si raggiunge davvero, e in un tempo talmente breve da non poter essere certamente misurabile con uno strumento come l'amperometro, a differenza di quello impiegato dal parà (che è dell'ordine della decina di secondi) per raggiungere la propria. In effetti un modello appropriato della conduzione elettrica fornisce per il tempo di raggiungimento della velocità di regime di un portatore di carica un ordine di grandezza di $10^{-15}s$! Le due situazioni fisiche sono tuttavia talmente differenti che questa grande diversità numerica non ci deve meravigliare. Proseguendo con i dati sperimentali, si misura la corrente I che scorre nel conduttore al variare della tensione ΔV tra i suoi capi (o, come si dice, "ai suoi capi"). Nel 1827 il fisico tedesco Ohm fece per la prima volta questa misura, trovando che ΔV e I sono proporzionali, prendendo la costante di proporzionalità il nome di R, detta **RESISTENZA** del conduttore, da cui il nome spesso usato di conduttore <u>resistivo</u> per indicare un qualsiasi conduttore reale. Si scrive:

$$\Delta V = RI \qquad (4.1)$$

La (4.1) si chiama **legge di Ohm** ed ha enorme importanza nelle applicazioni; se cambiamo il materiale conduttore (quindi ci aspettiamo che possano cambiare n e q) e variamo la sua geometria, cambiando S e l , otteniamo, come fece ancora Ohm, che il valore di R varia nel seguente modo:

$$R = \rho \frac{l}{S} \qquad (4.2)$$

dove ρ è una costante dipendente dal materiale detta **resistività** elettrica del conduttore. La (4.2) è detta **seconda legge di Ohm**, per cui spesso si chiama la (4.1) prima legge di Ohm per distinguere i due risultati. Faccio notare che nell'uso comune spesso i nomi "resistenza" e "resistore" vengono un po' confusi (lo faremo anche noi…) chiamando il resistore con il nome di "resistenza": il resistore è il conduttore, la resistenza è una grandezza fisica con la sua unità di misura, che tra l'altro è ovviamente $\frac{V}{A}$ e si chiama **ohm** (simbolo Ω) in onore del suo scopritore.

E' interessante ora confrontare questi due risultati sperimentali con il nostro modello viscoso per vedere se c'è un qualche accordo. Il confronto è semplice: all'interno del conduttore i portatori si muovono alla velocità di regime $v_l = \frac{qE}{\beta}$, già ottenuta alla fine del paragrafo 3. Torno su questo punto della velocità di regime: come ho già accennato, occorre concepirla come una velocità media, perché non possiamo pretendere predizioni rigorose dal nostro modello e perché siamo abituati dall'anno scorso all'uso di proprietà medie (vedi l'energia delle molecole di un gas) quando si ha a che fare con sistemi fisici a numero molto elevato di particelle, come è nel caso della carica in moto dentro un conduttore. Avendo già deciso di chiamare semplicemente $\vec{v}$ la velocità media dei portatori, potremo dire che la densità di corrente media, che è in realtà la vera grandezza misurabile, vale, dalla (3.3), $\vec{J} = nq\vec{v}$; ad essa ci riferiremo chiamandola semplicemente densità di corrente. Usando proprio la (3.3) e la formula della velocità limite si ottiene

$$\frac{\vec{J}}{nq} = \frac{q\vec{E}}{\beta} \qquad (4.3)$$

da cui

$$\vec{J} = \frac{nq^2}{\beta}\vec{E} \qquad (4.3\text{ bis})$$

Poiché $El = \Delta V$, sostituendo quest'ultima relazione a secondo membro e la (3.4) a primo membro della (4.3) si ottiene per i moduli $\frac{I}{nqS} = \frac{q\Delta V}{l\beta}$ e quindi

$$\Delta V = \frac{\beta}{nq^2}\frac{l}{S}I \qquad (4.4)$$

La (4.4) giustifica entrambe le leggi di Ohm: ponendo in essa $R = \frac{\beta}{nq^2}\frac{l}{S}$ si ottiene la prima legge, e ponendo in quest'ultima relazione $\rho = \frac{\beta}{nq^2}$ si ottiene la seconda! Tutto sommato non è male come risultato…Nonostante questa predizione confortante del modellino viscoso, se non altro perché capace di spiegare le leggi di Ohm che sono leggi sperimentali, il grosso guaio del parametro β è quello di non poter essere collegato a nessuna proprietà microscopica del materiale conduttore, il che ne riduce di molto l'efficacia. Le cause dell'"attrito" chiamano in causa infatti, come già accennato, un insieme di leggi del moto con regole troppo complesse per noi ; comunque, restiamo sul generico, scaricando sul fantomatico parametro β le caratteristiche dell'attrito risentito dai portatori, senza pretendere né fidarci più di tanto. Secondo il nostro modellino ρ dipende solo da proprietà specifiche del conduttore, come deve essere: β , che descrive l'"attrito" del materiale e n che fornisce il numero di portatori disponibili. Il conduttore è tanto migliore quanto più piccolo è β e quanto più grande è n , come confermato dalla formula. E' molto usato anche il reciproco di ρ , $\sigma = \frac{1}{\rho}$, detto **conducibilità** elettrica del conduttore; dalla (4.3 bis) e da questa definizione si può scrivere

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad (4.5)$$

detta **forma vettoriale** della (prima) legge di Ohm.

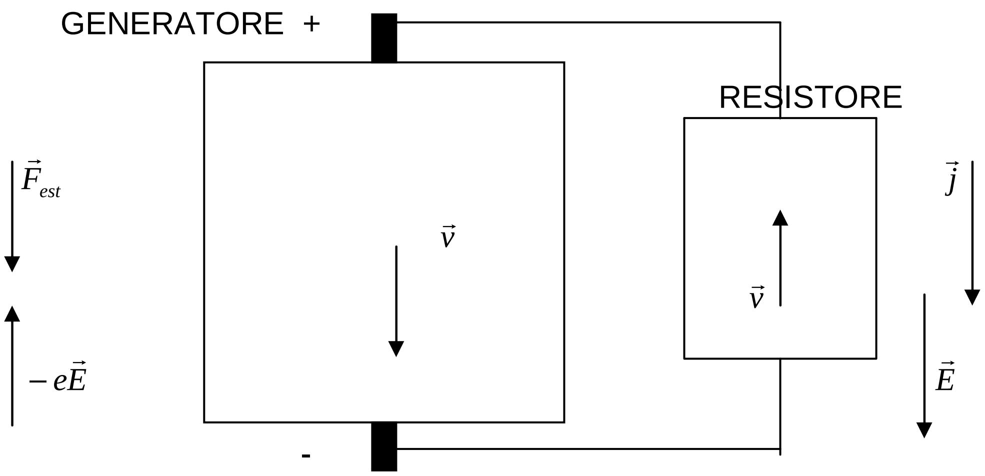
I vettori $\vec{J}$ e $\vec{E}$ risultano allora paralleli e concordi (indipendentemente dal segno di q …!) dato che la costante $\sigma = \frac{nq^2}{\beta}$ è positiva; se quindi i portatori hanno carica positiva, per la natura di $\vec{J}$ si muovono nel verso di $\vec{E}$ e se hanno carica negativa nel verso opposto. Ma questo l'avevamo già capito; il fatto fisico nuovo, espresso dalla (4.5), è costituito proprio dalla proporzionalità diretta tra le due grandezze.

La (4.5) è preferita dai fisici alla (4.1) perché non è legata, a differenza di questa, alla scelta del segno di I, cioè del verso di percorrenza del conduttore: nel nostro circuito elementare non esiste problema, perché si conosce a priori il verso di $\vec{E}$, che va dal capo del conduttore collegato al polo positivo del generatore al capo collegato a quello negativo (volgarmente, è diretto dall'anodo al catodo). E' quindi naturale scegliere questo verso come quello convenzionale di percorrenza del conduttore, ottenendo un'intensità di corrente positiva nella (4.1) e un vettore $\vec{J}$ orientato, per la (4.5), nel verso da noi scelto. Insomma, nel circuito elementare la d.d.p. ai capi del conduttore è data a priori, e quindi anche il segno di I o la densità di corrente $\vec{J}$; in casi più generali, queste grandezze saranno il risultato di un calcolo di difficoltà variabile con la situazione fisica; ne impareremo la tecnica nel prossimo capitolo.

5) IL CIRCUITO ELEMENTARE

Se con un generatore alimentiamo un resistore di resistenza R, realizziamo il normale circuito elementare, verificando per il conduttore resistivo la legge di Ohm come appena discusso. Ricordo che il moto delle cariche sul resistore, rappresentato in fig. 1 come una "scatola", è regolato dalla legge di Ohm, che scrivo nella sua forma vettoriale: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Il vettore $\vec{J}$ è quindi all'interno del resistore orientato verso il basso. Poiché $\vec{J} = nq\vec{v}$ e i portatori di carica sono elettroni, si ha $\vec{J} = -ne\vec{v}$. Viste le polarità dei morsetti del generatore, all'interno del resistore la densità di corrente $\vec{J}$ e il campo elettrico $\vec{E}$ risultano orientati verso il basso in fig. 3 e il vettore $\vec{v}$ verso l'alto (quello disegnato all'interno della "scatola-resistore").

Figura 3



Cosa succede invece <u>dentro</u> il generatore? Ricordiamo un dato sperimentale: con ΔV costante nel tempo, anche l'intensità di corrente I lo è, cioè la velocità (media) $\vec{v}$ dei portatori è costante nel tempo, fuori del generatore ma anche dentro altrimenti ci sarebbe un accumulo di carica netta da qualche parte durante il moto, cosa che non viene osservata sperimentalmente. Faccio notare che, per avere la stessa intensità di corrente uguale dentro e fuori dal generatore, la velocità media dei portatori non è necessariamente uguale data la diversa sezione dei singoli tratti di circuito; ma quello che voglio evidenziare è che, sia dentro che fuori, le cariche non accelerano. Come fanno le cariche che passano dall'interno della pila a muoversi di moto uniforme? Ovviamente devono essere sottoposte ad una forza risultante nulla! Riferiamoci ancora alla figura 3 : le cariche (elettroni di carica $-e$) interne al generatore, raffigurato anch'esso come una "scatola", si muovono dal + verso il - (in questo disegno, dall'alto verso il basso) con vettore velocità $\vec{v}$; la forza elettrica $-e\vec{E}$ è rivolta in verso **contrario** (frenante!) **a quello del moto**. Ci deve quindi essere qualcos'altro che permette agli elettroni in moto di superare questa barriera e immettersi nella parte esterna del circuito, cioè nel resistore. Questo "qualcos'altro" si traduce in una forza: l' ho chiamata in figura $\vec{F}_{est}$ ed è prodotta dalla fonte di energia su cui funziona la macchina: una reazione chimica, del lavoro meccanico, dell'energia luminosa….Tale forza esterna compie un **lavoro positivo** (è parallela e concorde alla velocità!) , esattamente opposto a quello compiuto dalla forza di campo: il lavoro compiuto su ogni carica elementare $-e$ vale in modulo $L_q = e\Delta V = e\varepsilon$. Ritorniamo ad analizzare la situazione fuori dal generatore: se fuori c'è la semplice resistenza R, come già visto il campo elettrico tende ad accelerare le cariche in moto , ma in condizioni di velocità di regime tale forza di campo è bilanciata da una forza d'attrito (nel nostro modello viscoso sussiste l'uguaglianza, già utilizzata, tra i moduli della forza di campo e della forza di attrito viscoso: $e \cdot E = \beta \cdot v$;). Anche qui il lavoro compiuto dalle due forze in gioco su ogni carica q all'interno del resistore è uguale e opposto e vale ancora $e\varepsilon$ (ovviamente quello del campo è $+e\varepsilon$ e quello della forza d'attrito $-e\varepsilon$). Tutto ciò è coerente con la conservatività di $\vec{E}$; l'effetto complessivo è però che viene compiuto del lavoro da $\vec{F}_{est}$ che alla fine si ritrova in energia termica attraverso l'attrito sul conduttore reale. $\vec{E}$ sembra non contare nulla perché compie su ogni carica q un lavoro nullo in un giro completo, ma il merito del processo di trasferimento dell'energia dal generatore all'utilizzatore è tutto suo. Peraltro, se il campo elettrico ha il merito di realizzare il trasferimento dell'energia, chi fornisce tale energia è ovviamente la fonte esterna, principio di funzionamento del generatore, che si traduce in $\vec{F}_{est}$. Se non consideriamo l' effetto della resistenza, le forze agenti hanno una circuitazione che vale $+e\varepsilon$: quella del campo è però nulla, per cui il lavoro per unità di carica sul circuito elementare, che vale ε , è compiuto in sostanza da $\vec{F}_{est}$. In assenza di attrito un campo elettrico $\vec{E}$ da solo sarebbe bastato a far percorrere il circuito alle cariche mobili, ma per farle muovere dentro un conduttore reale ci vuole una fonte esterna di energia. La F.E.M. , definita inizialmente come una proprietà del generatore (la d.d.p. misurata a circuito aperto) si può pensare anche come una proprietà del circuito: la F.E.M. è la **circuitazione per unità di carica** escludendo l'effetto dell'attrito esercitato dal conduttore reale sulle cariche in moto.

6) POTENZA ELETTRICA.

Occupiamoci in modo più quantitativo del trasferimento di energia nel nostro circuito elementare: riporto ora il calcolo (diverso da quello del testo) della potenza totale sviluppata da $\vec{F}_{est}$ e applicata a tutte le cariche presenti **all'interno** del generatore. Si ricava facilmente la formula che fornisce, a partire dalla potenza media (vedi il paragrafo 5 del capitolo "Lavoro ed energia") la **potenza istantanea** P sviluppata da una forza $\vec{F}$ agente su un corpo in moto con velocità vettoriale istantanea $\vec{v}$, basta far tendere a zero l'intervallo Δt della definizione (5) di quel paragrafo. Si ottiene

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (6.1)$$

e nel nostro caso per <u>una</u> carica q soggetta a $\vec{F}_{est}$:

$$P_q = \vec{F}_{est} \cdot \vec{v} = qEv \qquad (6.2)$$

Dalla (6.2) si deduce che $P_q > 0$ dato che i due vettori $\vec{F}_{est}$ e $\vec{v}$ sono paralleli e concordi; questa condizione corrisponde al fatto che dentro il generatore siano paralleli e discordi i vettori $\vec{J}$ ed $\vec{E}$. Nel circuito elementare questa condizione è sempre verificata: potremo vedere che in situazioni fisiche più complesse (reti elettriche) essa non è necessariamente verificata perché i vettori $\vec{J}$ ed $\vec{E}$ possono essere concordi all'interno di un generatore, che quindi sviluppa in questo caso potenza negativa, cioè **assorbe energia** invece di erogarla.

Completiamo ora il calcolo della potenza erogata dal generatore. Definiamone una sezione equivalente S_{gen}; una lunghezza equivalente l_{gen} del percorso interno delle cariche (riferiamoci a un cilindro o parallelepipedo equivalente) , per cui il volume equivalente che contiene tutta la carica interna vale $V_{gen} = S_{gen} \cdot l_{gen}$; una densità di portatori all'interno del generatore n_{gen}; il numero di portatori di carica presenti all'interno del generatore a un istante t arbitrario N_{gen}. Su ognuno di questi portatori agisce $\vec{F}_{est}$, per cui la potenza istantanea <u>sviluppata complessivamente</u> da questa forza agendo all'interno del generatore, che potremo chiamare **potenza totale generata** e che indichiamo qui con P_{gen}, vale evidentemente:

$$P_{gen} = N_{gen} \cdot P_q \qquad (6.3)$$

Ma usando la (6.1) e la (6.2) insieme alla (3.2) e alla definizione di f.e.m., si ottengono i passaggi seguenti:
$P_{gen} = N_{gen} \cdot P_q = n_{gen} \cdot l_{gen} \cdot S_{gen} \cdot q \cdot E \cdot v = \varepsilon \cdot I$. Scriviamo la formula risultante:

$$P_{gen} = \varepsilon \cdot I \qquad (6.4)$$

Questa è una formula semplice e molto importante: fornisce un risultato costante per la potenza sviluppata da un generatore se I è costante, come per tutti i conduttori per cui vale la legge di Ohm.
Analizziamo la situazione **all'esterno** del generatore, cioè dentro il resistore, cioè la "scatola" in fig. 1. Come già visto, dentro il resistore il campo elettrico tende ad accelerare le cariche q ma in condizioni di velocità di regime tale forza di campo è uguale e opposta alla forza d'attrito (nel nostro modello viscoso sussiste l'uguaglianza $q \cdot E = \beta \cdot v$). Si calcola ora facilmente la potenza P sviluppata dalla forza di campo agente sul resistore ripetendo esattamente la stessa procedura seguita per il calcolo della P_{gen} sviluppata da $\vec{F}_{est}$: si utilizzano ovviamente n, l, S associate al resistore al posto di $n_{gen}, l_{gen}, S_{gen}$ e si tiene conto del fatto che la d.d.p. ai capi del resistore non è necessariamente ε , o perché il generatore pur agendo da solo non è ideale (vedi l'ultima parte del paragrafo) oppure perché la resistenza R è inserita nel circuito insieme ad altre. Chiamando ΔV la d.d.p. ai capi di R si ottiene

$$P = \Delta V \cdot I \qquad (6.5)$$

e per la legge di Ohm la potenza sviluppata dalla forza di campo sul resistore si può esprimere anche come

$$P = RI^2 \qquad (6.6)$$

Tale potenza è uguale e opposta a quella sviluppata dalla forza d'attrito (nel modello viscoso $-\beta \cdot \vec{v}$), che come noto compie sempre un lavoro negativo. Faccio notare che il segno della potenza sviluppata dalla forza elettrica $q\vec{E}$ è positiva se stavolta sono paralleli e concordi $\vec{J}$ ed $\vec{E}$, cioè, per la legge di Ohm in forma vettoriale, in ogni caso (il segno di P è comunque inequivocabile data la (6.6). A causa della condizione di equilibrio $\vec{F} = 0$ l'energia cinetica dei portatori di carica non cambia (in realtà la condizione di equilibrio, supposta dal modello, è una semplificazione "brutale" che ha un qualche senso a livello macroscopico ma non a livello del comportamento molecolare); cambia però comunque l'energia cinetica media (ricordare che $L = \Delta E_c$) degli ioni del reticolo per gli urti a livello microscopico con i portatori stessi; ancora per urto gli ioni possono poi cedere energia alle molecole dei gas che costituiscono l'aria circostante. In sostanza il lavoro $L = RI^2 \Delta t$ compiuto nell'intervallo di tempo Δt è convertito interamente in energia termica (energia cinetica media associata al moto molecolare): questo comportamento fu verificato sperimentalmente da Joule, che misurò appunto un calore

$$Q = RI^2 \Delta t \qquad (6.7)$$

(espresso in joule) assorbito dal reticolo cristallino del metallo più l'aria circostante. La potenza associata $P = RI^2$ è detta appunto potenza Joule.
E' facile infine stabilire il bilancio energetico nel caso di un generatore reale di F.E.M. ε e resistenza interna r che alimenta un utilizzatore percorso da corrente I. Tale utilizzatore può essere un resistore, per il quale vale la legge di Ohm, ma anche un qualsiasi bipolo non necessariamente resistivo (ad esempio un qualunque elettrodomestico come una lavatrice, una lavastoviglie, un televisore o un lettore di CD). Si ottiene

$$\varepsilon = rI + \Delta V \qquad (6.8)$$

con ΔV differenza di potenziale ai capi dell'utilizzatore. Moltiplicando membro a membro la (6.8) per I si ottiene:

$$\varepsilon \cdot I = rI^2 + \Delta V \cdot I \qquad (6.9)$$

Questa equazione rappresenta il bilancio energetico del generatore; il primo membro è la potenza $P_{gen} = \varepsilon \cdot I$ da esso generata, di cui la parte rappresentata da rI^2 è la potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza interna del generatore e la parte $P_u = \Delta V \cdot I$ è la potenza trasferita all'utilizzatore, che, se è un resistore (stavolta, se si tratta di un elettrodomestico, può essere ad esempio uno scaldabagno) avente resistenza R, vale RI^2 ed è ancora potenza dissipata per effetto Joule. Evidentemente si cerca di diminuire il più possibile la frazione dissipata nella resistenza interna del generatore a vantaggio della potenza trasferita $\Delta V \cdot I$: il generatore è considerato di qualità tanto migliore quanto più il cosiddetto rendimento del generatore $\eta = \dfrac{P_u}{P_{gen}}$ si avvicina al valore ideale 1.

7) RETI ELETTRICHE E PRINCIPI DI KIRCHHOFF.

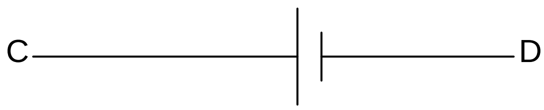
Il circuito elementare è il punto di partenza nello studio delle correnti elettriche: ad esso si possono ricondurre situazioni fisiche più complicate. Quando per esempio si collegano a un solo generatore resistenze in serie o in parallelo, o combinazioni di esse, basta calcolare come appena imparato la resistenza equivalente del complesso dei resistori. Esiste però una situazione ancora più generale, realizzata quando si utilizzano più generatori: ce ne occupiamo brevemente in questo paragrafo,
Elenco, prima di iniziare, alcuni risultati già acquisiti che saranno ora utili, servendomi anche di disegnini esplicativi dei simboli normalmente usati negli schemi elettrici.

1) Un resistore di resistenza R , con i suoi due capi che chiamo qui A e B , si può così disegnare, avendo scelto arbitrariamente il verso convenzionale della corrente che lo percorre:

Dalla legge di Ohm, risulta in questo caso che:

$V_{AB} = V_A - V_B = RI$. (regola 1)

2) Un generatore ideale di tensione continua avente f.e.m. ε , con i suoi due poli contrassegnati qui con C e D , si può così disegnare adottando per esso il simbolo qui sotto, il più semplice e forse il più usato:



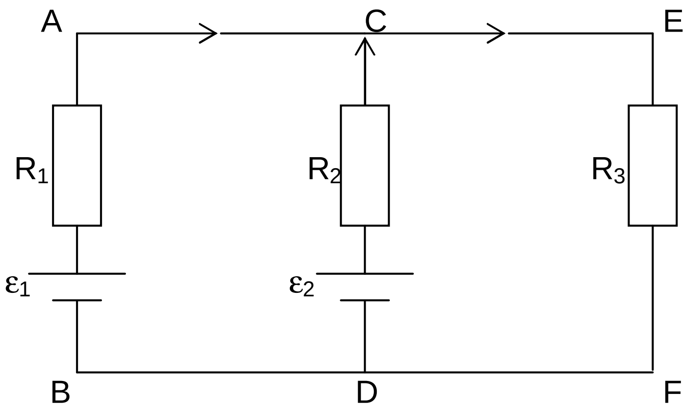
con l'anodo C corrispondente alla lineetta verticale più lunga e il catodo D a quella più corta; per definizione si ha evidentemente:

$V_{CD} = V_C - V_D = \varepsilon$ (regola 2)

(n.b.: si considereranno sempre nelle formule le f.e.m. ε come dei numeri positivi).
Ai punti 1) e 2) ho descritto brevemente i due elementi costitutivi delle cosiddette **reti in corrente continua**: possiamo collegare tanti di questi elementi nel modo che vogliamo, purché nessun capo di resistori o polo di generatori rimanga libero (escluderebbe dal passaggio di corrente l'elemento a cui appartiene, disattivandolo…).
Diamo ora altre definizioni che ci consentiranno di semplificare gli enunciati successivi:

a) L'insieme dei generatori e resistori collegati come appena detto è chiamato rete elettrica;
b) Chiamiamo bipolo elementare della rete un qualsiasi generatore o resistore;
c) Chiamiamo terminale del bipolo elementare un capo (di un resistore) o un polo (di un generatore);
d) chiamiamo maglia della rete un qualunque circuito chiuso di bipoli elementari in cui ognuno di essi è percorso solo una volta;
e) chiamiamo nodo della rete un punto in cui confluiscono tre o più terminali.
f) È chiamato ramo un bipolo elementare (o più bipoli elementari in serie) collegato a due nodi della rete.

Disegno ora un esempio di rete elettrica, che è lo stesso del par. 6.5 del testo nelle figure 6.16 e 6.17 ; l'esempio servirà a chiarire meglio le definizioni appena date.



Qui il disegno, il nome delle f.e.m. e qualche lettera sovrabbondante sono (volutamente) diversi da quelli della fig. 6.17 ma la rete è <u>esattamente</u> la stessa. Con riferimento alle lettere dell'ultimo elenco si possono così commentare le definizioni precedenti :

> **a)** vedete che non ci sono terminali liberi; **b)** ci sono cinque bipoli elementari, due generatori e tre resistori; **c)** ci sono quindi in tutto dieci terminali: ho scritto solo sei lettere delle dieci possibili, che tra l'altro corrispondono a due terne di punti collegati in modo da essere equipotenziali (A,C,E sono equipotenziali; B,D,F sono equipotenziali); **d)** i circuiti ACDBA , ACEFDBA , CEFDC sono maglie della rete: ho deciso arbitrariamente (vedi l'ordine delle lettere che ho scritto) di considerarle tutte e tre percorse nel disegno in senso <u>orario</u>; **e)** il punto C e il punto D sono nodi della rete; **f)** i tratti AB, CD e EF sono i rami della rete, di cui solo il terzo costituito da un bipolo elementare (resistivo).

A questo punto possiamo impostare con dei principi del tutto generali la cosiddetta risoluzione di una rete, cioè il calcolo dei valori delle correnti in ogni ramo,che sono le incognite del nostro problema (nell'esempio precedente, le incognite sono tre). Per fare questo, occorre preliminarmente scegliere un verso convenzionale della corrente nei rami: l'ho contrassegnato con le freccette, ed è lo stesso scelto anche in fig. 6.17.

I principi con cui si imposta la risoluzione di una rete sono due: li enuncio in italiano senza l'uso di formule perché sono abbastanza chiari di per sé, evitando di creare difficoltà di notazione:

P1) Primo principio di Kirchhoff (o "**principio ai nodi**"):
<u>la somma delle correnti che confluiscono in un nodo (considerate cioè di verso convenzionale entrante nel nodo) è nulla.</u>

L'enunciato segue direttamente dal principio di conservazione della carica. Voglio subito far vedere come si scrive il primo principio di Kirchhoff per il nodo C del circuito prima disegnato: chiamando rispettivamente I_1 , I_2 e I_3 le correnti che scorrono nelle resistenze R_1 , R_2 e R_3 , si ha:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (7.1)$$

E' un'equazione di primo grado: ce ne vogliono altre (almeno altre due) per risolvere la rete, essendo tre le incognite del problema. Faccio notare che, essendo il verso convenzionale di I_3 non entrante ma uscente dal nodo in base alla scelta fatta nel disegno della rete, ho dovuto usare un segno meno nella (7.1) . Osservo anche che avrei potuto applicare il primo principio anche all'altro nodo D , ma avrei ottenuto in quel caso ancora la (7.1). Enuncio ora l'altro principio, che ci consentirà di completare la risoluzione della rete.

P2) Secondo principio di Kirchhoff (o "**principio alle maglie**"):
la somma delle tensioni ai capi di ogni bipolo elementare di una maglia (scelto ad arbitrio un verso di percorrenza della maglia) è nulla.

L'enunciato segue direttamente dalla conservatività del campo elettrico, che ha consentito di definire per esso la funzione potenziale, e dalla definizione di maglia come circuito, cioè come linea chiusa. Facciamo ora vedere come si traduce in formula il secondo principio di Kirchhoff alla prima delle maglie prima identificate nella rete del disegno, cioè la maglia ACDBA (la successione delle lettere indica già la scelta del verso di percorrenza della maglia). Applicando le proprietà 1) e 2) dei bipoli elementari discusse all'inizio di questo paragrafo, si deve scrivere, partendo ad esempio proprio dal nodo A:

$$-R_2 I_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + R_1 I_1 = 0 \qquad (7.2)$$

Faccio notare che i segni meno sono legati alla scelta della percorrenza della maglia e nello stesso tempo sia all'ordine dei poli dei generatori incontrati lungo la maglia che al verso scelto preliminarmente per le correnti nei resistori. La (7.2) è un'altra equazione di primo grado: ne posso costruire altre due perché ci sono altre due maglie, ottenendo, insieme alla (7.1) e alla (7.2) , un sistema lineare di quattro equazioni in tre incognite. Come noto, sono necessarie e sufficienti tre equazioni indipendenti per avere una terna unica di correnti, che è imposta fisicamente; una delle tre equazioni derivanti dal secondo principio di Kirchhoff è infatti sovrabbondante perché combinazione lineare delle altre due. Descriviamo comunque l'ultima fase della risoluzione della rete che abbiamo preso come esempio. Scegliamo, oltre alla (7.1) e alla (7.2), l'equazione originata dal principio alle maglie applicato a CEFDC: è la scelta del testo nel calcolo del paragrafo 6.5 (esempio 2), che fornisce anche la soluzione del sistema, cioè la terna di correnti I_1 , I_2 , I_3 . Provate, se volete, a utilizzare l'altra maglia ACEFDBA al posto di CEFDC: troverete come risultato la stessa terna di correnti proprio perché le tre equazioni derivate dal secondo principio di Kirchhoff sono linearmente dipendenti, cioè ognuna è combinazione lineare delle altre due e quindi delle tre equazioni "alle maglie" una può essere eliminata non fornendo informazioni nuove.
Fatte queste considerazioni, sarebbe senz'altro molto utile conoscere a priori un criterio generale che ci permettesse, data una rete con N correnti incognite, di determinare immediatamente N equazioni indipendenti; questo criterio esiste (anzi ce ne sono più di uno), ma non stiamo ad enunciarlo qui. Per i semplici esercizi applicativi che faremo noi, è sufficiente applicare i due principi imparati ora ed agire con un po' di acume; se la rete non è troppo complicata (al massimo quattro incognite) in genere si riconosce subito se ci sono equazioni sovrabbondanti, come per esempio le due (una nell'applicare il primo principio e una nell'applicare il secondo) dell'esempio che abbiamo considerato.