Integrazione per sostituzione e per parti.

Trattiamo con la dovuta attenzione le fondamentali formule di integrazione collegate alla regola di derivazione delle funzioni composte. Questa, come noto, si può scrivere come:

$$Df(g(t)) = g'(t) \cdot f'(g(t)) \qquad (1)$$

(ho chiamato per comodità t la variabile indipendente; il motivo della scelta sarà più chiaro tra poco). Consideriamo ora, con la notazione consueta, una qualsiasi primitiva $F(t)$ della funzione $f(t)$; posso applicare allora la (1) scrivendo

$$DF(g(t)) = g'(t) \cdot f(g(t)) \qquad (1')$$

Dalla (1') e dalla definizione di integrale indefinito si può scrivere:

$$\int g'(t) \cdot f(g(t))dt = F(g(t)) + k \qquad (2)$$

(naturalmente, volendo, nella (2) si può scrivere x al posto di t, essendo inessenziale il nome della variabile indipendente). Una funzione del tipo $g'(t) \cdot f(g(t))$ può quindi essere integrata, applicando la (2), se si conosce una primitiva $F(t)$ della funzione $f(t)$, cioè in altre parole l'integrale indefinito di $f(t)$. Chiameremo la (2) **prima regola di integrazione (indefinita) per sostituzione**. Sembra ovviamente abbastanza raro avere a che fare con una funzione integranda del tipo $g'(t) \cdot f(g(t))$; le prime volte non si riesce nemmeno bene a riconoscere tale struttura nei singoli casi. La (2) è comunque molto importante in numerosi casi concreti; può inoltre essere riscritta, come vedremo subito, in una forma più generale se $g(t)$ è una funzione, oltre che derivabile, anche invertibile. In questo caso, operando il cambiamento di variabile

$$x = g(t)$$

dall'invertibilità della funzione $g(t)$ si può scrivere

$$t = g^{-1}(x)$$

Si può poi riscrivere la (2) utilizzando la variabile x, nel modo seguente:

$$\left\lfloor \int g'(t) \cdot f(g(t)dt \right\rfloor_{t=g^{-1}(x)} = F(x) + k \qquad (3)$$

Ma il secondo membro della (3) è l'integrale indefinito di $f(x)$, per cui:

$$\int f(x)dx = \left\lfloor \int g'(t) \cdot f(g(t)dt \right\rfloor_{t=g^{-1}(x)} \qquad (3')$$

Questa formula, che chiameremo **seconda regola di integrazione (indefinita) per sostituzione**, affronta il problema da un altro punto di vista: si può cercare cioè di integrare una qualsiasi funzione $f(x)$ operando un opportuno cambiamento di variabile $x = g(t)$ se si sa già stavolta integrare la funzione $g'(t) \cdot f(g(t))$. Il problema (spesso non

facile da risolvere!) è di scegliere la funzione invertibile $g(t)$ che generi una funzione $g'(t)\cdot f(g(t))$ di cui si sappia calcolare l'integrale. Una volta calcolato questo integrale, occorre infine operare la sostituzione $t=g^{-1}(x)$, come dal secondo membro della (3'), per ottenere, come richiesto dal primo membro, l'integrale indefinito nella variabile x.
Occorre molto esercizio per usare la (3'): spesso si scelgono delle funzioni di prova $g(t)$ per le quali l'integrale della funzione a secondo membro della (3') è ancora più "infattibile" di quello di partenza.
Ricapitoliamo comunque le fasi operative dell'uso della (3'):

a) Scelta della sostituzione $x=g(t)$.
b) Integrazione della funzione $g'(t)\cdot f(g(t))$.
c) Fatto ciò, ritorno alla variabile x, con l'eliminazione di t nell'integrale ponendo $t=g^{-1}(x)$.

Un'osservazione su questa regola: se (come spesso succede agli studenti!) non si riesce a riconoscere il primo membro della (2) in una funzione integranda, si può sempre utilizzare la (3'), che, seppure meno immediata, porta con certezza al risultato; naturalmente, purchè la sostituzione al punto a) della procedura appena descritta sia quella buona…
Concludo ricavando una seconda regola di integrazione, quella collegata alla regola di derivazione del prodotto di funzioni. Da quest'ultima si può infatti scrivere:

$$D\left[\int f(x)\cdot g'(x)dx+\int f'(x)\cdot g(x)\right]= f(x)\cdot g'(x)+ f'(x)\cdot g(x)=D\big(f(x)\cdot g(x)\big) \qquad (4)$$

dalla quale, per definizione di integrale indefinito, posso scrivere

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx+\int f'(x)\cdot g(x)dx= f(x)\cdot g(x) \qquad (4bis)$$

che può essere scritta anche come

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx= f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx \qquad (5)$$

La (5) è detta **regola d'integrazione per parti**. In questa formula il calcolo dell'integrale con la particolare struttura del primo membro (la funzione integrando è il prodotto di una certa funzione $f(x)$ per la derivata di un'altra funzione data $g(x)\ldots$) è ricondotto al calcolo dell'altro integrale presente a secondo membro, con una struttura simile al primo ma con i ruoli delle funzioni scambiati. E' ovvio che questa regola ha una reale applicabilità solo se l'integrale a secondo membro risulta più facile da calcolare rispetto all'integrale a primo membro; la (5) è comunque utilizzata con successo in un certo numero di situazioni concrete.