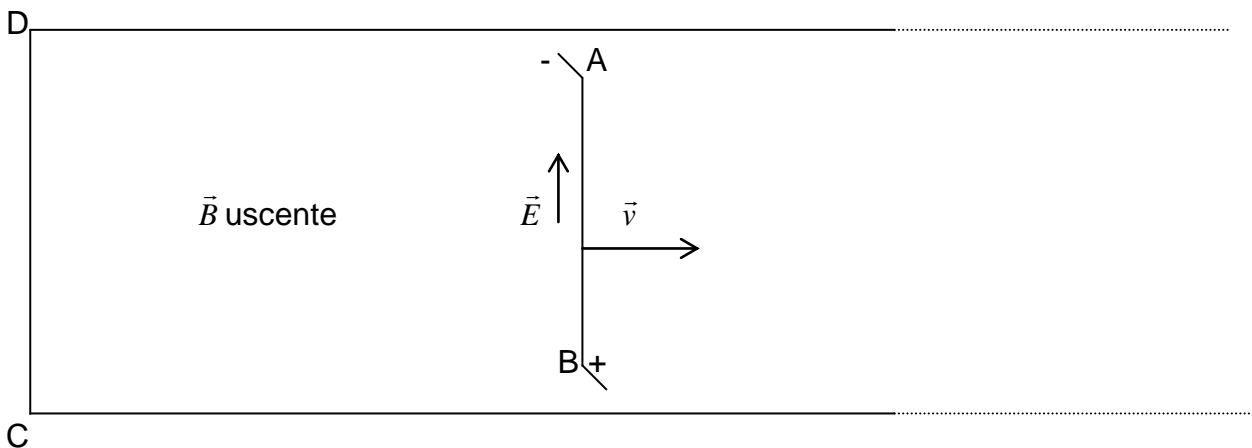


# INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

## 1) La macchina lineare in corrente continua.

Consideriamo il sistema fisico in fig.1, detto "generatore lineare in corrente continua" (o, più brevemente, **generatore lineare in continua**): in un campo  $\vec{B}$  uniforme perpendicolare al piano del disegno è immerso un circuito elettrico costituito da una rotaia indefinitamente estesa di materiale conduttore e due conduttori trasversali CD e AB perpendicolari alla rotaia, entrambi di lunghezza  $l$ ; CD è fisso, AB è libero di traslare in direzione orizzontale con attrito trascurabile e due contatti speciali (nei generatori in corrente continua si chiamano spazzole) consentono di mantenere in A e B il contatto elettrico nonostante il moto di AB (dalla figura 1 sembra che i lati AB e CD abbiano lunghezze diverse, ma è un effetto provocato dai due simboli utilizzati per le spazzole). Nel circuito ABCD può così sempre scorrere corrente. Per semplicità, supporremo non trascurabile solo la resistenza del ramo CD, che chiameremo  $R$ .

Fig. 1



Supponiamo che AB venga fatto muovere ad una velocità costante  $\vec{v}$  verso destra, cioè parallela all'asse x: i portatori liberi di carica  $q$  (qui **elettroni**, con  $q = -e$ ) presenti nel conduttore, spostandosi insieme ad esso, sono sottoposti alla forza di Lorentz ( $\vec{B}$  si suppone uniforme in tutto il piano del disegno). Applicando la regola della mano destra si trova allora facilmente che la forza di Lorentz è diretta da B verso A.

### 1a) Il generatore lineare a spazzole sollevate.

Immaginiamo che le spazzole poste in A e in B e schematizzate in fig. 1 con due tasti siano disinserite (sollevate) come in figura; il conduttore AB è quindi isolato dal resto del circuito. Si dice allora che la macchina funziona **a vuoto**. In effetti le cariche mobili (elettroni) presenti nel conduttore AB sono sottoposte alla forza  $-\vec{e}\vec{v} \wedge \vec{B}$  e tendono a muoversi in modo da ottenere uno stato di equilibrio con una distribuzione di carica positiva in basso (diciamo in prossimità del punto B in fig. 1) e di carica negativa in alto

(diciamo in prossimità di A); tale distribuzione di carica genera un campo elettrico statico e quindi una forza elettrica opposta a quella di Lorentz in modo da garantire l'equilibrio delle cariche (non dimentichiamoci l'abbondanza di cariche quasi libere nel conduttore...). Il campo elettrico così generato è diretto da A a B; quindi B ha potenziale maggiore di A, come il polo positivo (vedi figura) di un generatore di f.e.m. (con A ovviamente polo negativo). Poiché la forza elettrica  $-e\vec{E}$  equilibra la forza di Lorentz, si ha che lungo tutto il lato AB il campo elettrico vale  $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$  da cui

$$V_{BA} = vBl \quad (1.1)$$

La tensione nella (1.1) è chiamata **f.e.m. mozionale**.

### 1b) Il generatore lineare a spazzole inserite.

Inserendo le due spazzole (cioè chiudendo i due tasti), poiché i lati BC e AD sono supposti di resistenza trascurabile, la differenza di potenziale tra C e D vale  $V_{CD} = V_{BA} = vBl$ . Poiché il lato CD ha resistenza  $R$ , inserendo le spazzole il circuito ABCD

è chiuso (vedi fig. 2); vi scorre quindi una corrente  $I = \frac{vBl}{R}$ . Poniamo l'attenzione sul lato

mobile AB; qui sarà molto utile il paragone con il moto di un passeggero su un treno in corsa con velocità  $\vec{v}$ . Consideriamo infatti il moto di un portatore di carica che attraversa AB: il suo vettore velocità è la somma di due vettori componenti di origine diversa. Il primo vale  $\vec{v}$  a causa del moto dell'intero conduttore AB verso destra (il treno), l'altro è la velocità  $\vec{u}$  media di deriva legata alla corrente  $I$  dalla nota relazione  $I = nqSu$ . Il vettore  $\vec{u}$  è diretto verso l'alto in figura perché il vettore densità di corrente  $\vec{J}$  è diretto in senso orario. In un sistema di riferimento "fisso", cioè solidale al lato CD (lo chiameremo d'ora in avanti "**sistema CD**") ed alla rotaia, la velocità dei portatori di carica di AB è  $\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$ ; in un sistema di riferimento "mobile" solidale al conduttore AB (lo chiameremo d'ora in avanti "**sistema AB**") la velocità dei portatori di AB sarà invece semplicemente  $\vec{u}$ .

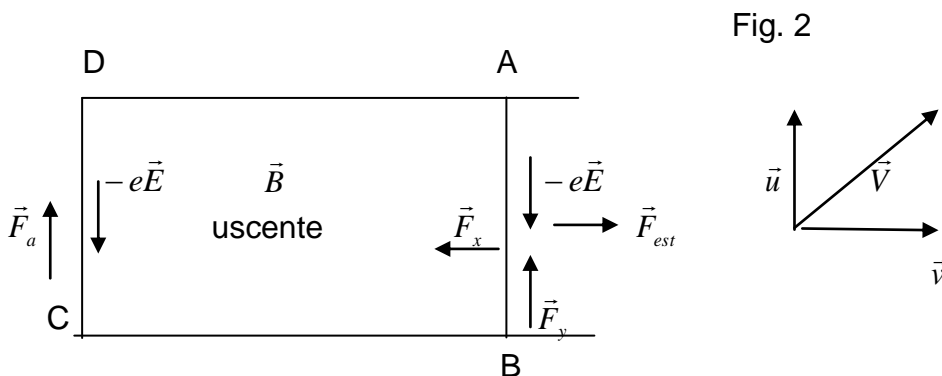


Fig. 2

Che cosa succede alle forze in gioco? La forza di Lorentz su ogni portatore di carica (elettrone!) è in realtà  $\vec{F}_L = -e(\vec{v} + \vec{u}) \wedge \vec{B}$ .

I prodotti vettoriali godono per fortuna della (ragionevole...) proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale; si ha quindi che

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \wedge \vec{B} - e\vec{u} \wedge \vec{B} \quad (1.2)$$

Il primo termine di questa somma è diretto verso l'alto in figura; il secondo termine, essendo  $\vec{u}$  diretta verso l'alto, è diretto orizzontalmente verso sinistra e frena il moto di AB. Chiamo, come in figura 2, il primo termine  $\vec{F}_y$  e il secondo  $\vec{F}_x$ . Pongo cioè:

$$\vec{F}_x = -e\vec{u} \wedge \vec{B} \quad (1.2\text{bis})$$

$$\vec{F}_y = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.2\text{ter})$$

Ritorniamo ora sul moto del nostro portatore che sta percorrendo AB: la sua velocità media di deriva è costante sia che si studi il moto nel sistema AB (vale  $\vec{u}$ ) sia che lo si studi nel sistema CD (vale  $\vec{V}$ ). Ciò significa che ogni portatore che percorre AB è in equilibrio, cioè che su di esso agisce una forza nulla. Affinché ciò si realizzi, deve essere

$$\vec{F}_y = e\vec{E} \quad (1.3)$$

Inoltre su ogni portatore in moto nel tratto AB deve agire una **forza esterna**, indicata in figura 2 con  $\vec{F}_{est}$ , diretta verso destra e tale che ovviamente

$$\vec{F}_{est} = -\vec{F}_x \quad (1.4)$$

Conclusione: per mantenere una  $\vec{v}$  costante ci vuole una forza esterna sul conduttore. In caso contrario, se  $\vec{v}$  è la velocità del conduttore ad un dato istante, AB rallenterà fino a fermarsi, estinguendo la forza di Lorentz e quindi ogni effetto sul circuito. Se, per inciso,  $\vec{u}$  fosse invece diretta verso il basso,  $\vec{F}_x$  tenderebbe ad accelerare il tratto AB amplificando l'effetto, cioè aumentando  $\vec{v}$  a dismisura!

Applicando le due condizioni di equilibrio che abbiamo imposto, possiamo scrivere, tenendo conto delle (1.2):

$$E = vB \quad (1.3\text{bis})$$

$$F_{est} = euB \quad (1.4\text{bis})$$

Valutiamo ora il **lavoro** delle forze agenti su ogni singolo portatore. Consideriamone ancora il moto nel tratto AB, che è un po' il punto cruciale della nostra trattazione; come si può ben vedere dalla fig. 2, sul portatore agiscono la forza esterna, la forza elettrica  $q\vec{E}$  e la forza di Lorentz con i suoi due vettori componenti  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$ . Ma il lavoro della forza di Lorentz  $\vec{F}_L = \vec{F}_x + \vec{F}_y$  è sempre NULLO per la natura della forza stessa (perpendicolare alla direzione del moto!). La forza elettrica compie un lavoro negativo, come le forze elettriche all'interno di un qualsiasi generatore. Dal punto di vista energetico è chiaro che ci vuole un intervento esterno perché una carica positiva raggiunga il punto B partendo da A, come del resto in qualsiasi altro generatore (effetti chimici nelle pile a secco e nelle batterie, meccanici nei generatori Van der Graaf, luminosi nelle fotocelle).

E'  $\vec{F}_{est}$  infatti che "fa il gioco": dimostriamolo. Poiché  $L_{FL} = 0$  si ha  $L_{Fx} + L_{Fy} = 0$ , ma

$L_{Fx} = -L_{Fest}$  in quanto le due forze sono opposte ; posso quindi scrivere  $L_{Fest} = L_{Fy}$ . E' facile calcolare  $L_{Fy}$  : vale  $e\nu Bl$  sul lato AB da cui

$$L_{Fest} = L_{Fy} = e\nu Bl \quad (1.5)$$

Il lavoro della forza esterna per unità di carica da A a B , cioè la f.e.m. di questo nuovo tipo di generatore avente anodo B e catodo A, è chiamato **Forza Elettromotrice Indotta**. Si indica spesso con  $\mathcal{E}_{ind}$  e vale evidentemente

$$\mathcal{E}_{ind} = \nu Bl \quad (1.6)$$

E' disponibile quindi ai capi del conduttore AB una differenza di potenziale costante di valore  $\nu Bl$  proprio come quella di una pila. Se consideriamo ora il moto dell'elettrone di carica  $-e$  nel tratto CD (trascuriamo i lati BC e AD di resistenza trascurabile) stavolta il campo elettrico  $\vec{E}$  di fig. 2 compie un lavoro positivo sulla carica, che può attraversare così la resistenza R con le modalità già note (presenza della forza d'attrito  $\vec{F}_a$  , effetto Joule...); naturalmente, essendo  $\vec{E}$  un campo elettrostatico e poiché nel nostro caso  $V_{CD} = V_{BA}$  , si ha che il lavoro, essendo opposto a quello di  $-e\vec{E}$  nel tratto AB, vale anch'esso  $e\nu Bl$ ; il lavoro per unità di carica nel tratto CD vale quindi  $\nu Bl$ . Naturalmente, nel tratto CD agisce anche la forza d'attrito  $\vec{F}_a$  , che compie un lavoro  $-e\nu Bl$ , essendo opposta alla forza di campo. E così il circuito è completamente percorso; faccio notare che il calcolo del lavoro di tutte le forze nei vari tratti è stato effettuato nel sistema CD. Quello che abbiamo appena descritto è il principio di funzionamento del cosiddetto **GENERATORE IN CORRENTE CONTINUA** o **DINAMO**. La vera dinamo è in realtà una macchina elettrica **rotante** con velocità angolare  $\omega$  mentre nel nostro esempio, ovviamente non di interesse pratico ma utile per capire il fenomeno fisico, il conduttore **trasla** (si parla di **generatore lineare**) con velocità costante  $\vec{v}$  trascinato in moto da una forza esterna che lavora contro  $\vec{F}_x$ . Inoltre nella dinamo occorre porsi il problema tecnico della generazione del campo  $\vec{B}$  (detto di eccitazione) in cui è immerso il sistema, che può essere fornito da una sorgente esterna (eccitazione separata, come evidentemente nella nostra macchina lineare) o può essere generato dalla corrente stessa della macchina (dinamo autoeccitata). L'importante è che tramite i campi elettrici e magnetici si possa effettuare la conversione di energia meccanica (quella fornita dal lavoro della forza esterna) in elettrica (la forza elettromotrice indotta), forma di energia particolarmente versatile come sappiamo bene noi esseri di inizio ventunesimo secolo.

## 2) Il bilancio energetico del generatore lineare.

Occorre ora analizzare più dettagliatamente gli effetti della forza esterna  $\vec{F}_{est}$  sul nostro circuito; come tutte le altre forze presenti in fig. 2,  $\vec{F}_{est}$  è una forza di valore estremamente piccolo, essendo proporzionale alla carica elementare  $e$  (non dimentichiamo che i portatori sono, nel nostro caso, elettroni); i portatori di carica su cui deve essere esercitata sono però in numero enorme. Valutiamo tale numero: se il conduttore AB ha volume  $V = Sl$  , utilizzando la densità di portatori  $n$  si calcola facilmente il numero  $N$  di portatori

nel conduttore AB :

$$N = nSl \quad (2.1)$$

per cui la forza esterna macroscopica  $\vec{F}_{tot}$  che occorre complessivamente esercitare per mantenere costante la velocità del conduttore AB vale

$$\vec{F}_{tot} = N\vec{F}_{est} \quad (2.2)$$

Utilizzando la (2.1), la (2.2), la (1.4bis) e la relazione  $I = nqSu$  si ottiene la semplice e interessante relazione

$$F_{tot} = BIl \quad (2.2bis)$$

già incontrata recentemente studiando le forze in Magnetostatica.

Calcoliamo la potenza sviluppata da questa forza, che rappresenta l'energia nell'unità di tempo ceduta dall'esterno attraverso il nostro generatore lineare, all'utilizzatore, che nel nostro caso è la resistenza R. Calcoliamola nel sistema CD: i portatori nel ramo AB si muovono con velocità  $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$  e quindi occorre usare tale velocità nella formula della potenza. Si ottiene:

$$P = \vec{F}_{tot} \cdot \vec{V} = F_{tot}v \quad (2.3)$$

avendo usato la proprietà distributiva dei prodotti scalari. Utilizzando la (2.2bis), la (2.3) e la (1.6) si ottiene

$$P = \varepsilon_{ind}I \quad (2.4)$$

La (2.4) non è altro che l'espressione della potenza, erogata da un generatore di f.e.m.  $\varepsilon_{ind}$  come è la nostra macchina lineare, a un utilizzatore percorso da una corrente  $I$ . Abbiamo calcolato direttamente l'effetto della forza totale esterna sul sistema; il principio di conservazione dell'energia non poteva naturalmente essere violato.

### 3) Induzione elettromagnetica e legge di Faraday.

Consideriamo da un altro punto di vista il lavoro delle forze presenti nel circuito ABCD del generatore lineare. Calcoleremo infatti il lavoro per unità di carica delle forze elettriche e magnetiche (nel calcolo non considereremo quindi il lavoro della forza d'attrito, né quello della forza esterna) in ogni porzione di circuito nel sistema di riferimento in cui la porzione di circuito è in quiete. Seguire questa "ricetta" ci porterà ad una conclusione semplice, ma estremamente importante e generale; è evidente che seguire la ricetta significa nel nostro caso calcolare nel sistema AB il lavoro delle forze nel tratto (mobile) AB e nel sistema CD il lavoro delle forze nei restanti tratti (fissi).

Facciamo intanto un'osservazione fondamentale: poiché i due sistemi di riferimento sono entrambi inerziali, le forze misurate nel sistema AB sono uguali a quelle misurate nel sistema CD. In generale quest'uguaglianza non sussiste per i lavori compiuti dalle forze e per le potenze da esse sviluppate, dipendendo questi dalle velocità, che non sono le stesse nei due sistemi. Per giunta, la forza di Lorentz dipende anch'essa, per sua natura,

dalla velocità, e quindi dal sistema di riferimento in cui è calcolata! Vediamolo subito nel nostro caso: se un osservatore nel sistema AB misura la forza di Lorentz su un elettrone di carica  $-e$  in quel lato, ottiene, dato che vede muoversi ogni portatore a velocità  $\vec{u}$ :

$$\vec{F}_L = -e\vec{u} \wedge \vec{B} = \vec{F}_x \quad (3.1)$$

La forza  $\vec{F}_y$  sembra sparita...eppure è naturalmente misurata anch'essa dall'osservatore nel sistema inerziale AB. La forza  $\vec{F}_y$  è davvero imbarazzante: non è una forza magnetica, ma fa muovere ogni carica  $q$  (nel nostro caso  $q = -e$ ) ed è proporzionale a  $q$  stessa. L'osservatore nel sistema AB è costretto a concludere che questa è una forza elettrica! E se si ipotizza  $\vec{F}_y = q\vec{E}$ , il campo elettrico  $\vec{E}$  così definito è diretto verso il basso e ha modulo  $E = vB$ ;  $\vec{E}$  viene detto **campo indotto** e si indica con  $\vec{E}_{ind}$ . Si ha evidentemente:

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (3.2)$$

Nel sistema AB si misurano quindi **due** campi elettrici: quello elettrostatico e quello indotto che è opposto al primo. Il campo risultante nel tratto AB, che è quindi il campo elettrico realmente presente nel sistema AB, è in questo caso nullo. La nostra conclusione può sorprendere, ma rappresenta una proprietà fondamentale dei campi elettrici (e anche dei campi magnetici): quella di dipendere dal sistema di riferimento.

Notiamo che nel sistema AB i lavori delle altre forze agenti sul lato AB sono nulli: la forza esterna  $\vec{F}_{est}$  (che comunque va esclusa dalla "ricetta") e la forza di Lorentz  $\vec{F}_x$  compiono entrambe lavoro nullo in quanto perpendicolari alla direzione del moto. Conclusione: il lavoro sul lato AB delle forze elettriche e magnetiche presenti calcolato nel sistema AB è **nullo**. Dobbiamo calcolare, secondo la nostra ricetta, il lavoro delle forze elettriche e magnetiche presenti (eccetto quella d'attrito) nei restanti lati del circuito ABCD, che sono solidali al sistema CD; abbiamo già calcolato questo lavoro, che è quello della forza elettrica sul lato CD e vale  $e v B l$ .

Possiamo concludere che nel circuito ABCD **la circuitazione del campo elettrico valutata nel sistema di riferimento solidale ad ogni porzione di circuito** vale

$$\mathcal{E}_{ind} = v B l .$$

Per un arbitrario circuito in cui sono presenti campi elettrici e magnetici la grandezza fisica che ho appena sottolineato si chiama, con un termine già utilizzato nel caso particolare finora trattato, **forza elettromotrice indotta**.

Conveniamo ora di chiamare  $\vec{E}'$  il campo elettrico misurato nel sistema di quiete di ogni singola porzione di un circuito. Possiamo allora scrivere, nel caso del generatore lineare, nel modo seguente l'espressione della circuitazione prima calcolata:

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = v B l \quad (3.3)$$

Ricordo che nel paragrafo 6 del capitolo "La conduzione elettrica" avevamo caratterizzato

la F.E.M.  $\varepsilon$  **di un circuito** come la circuitazione della forza per unità di carica non considerando la forza d'attrito esercitata dal conduttore resistivo. Se confrontiamo il generatore di F.E.M. introdotto in quel capitolo (pila a secco, batteria o simile) con il caso presente, troviamo ancora una fonte esterna di energia, che è quella che fornisce  $\vec{F}_{est}$ ; il meccanismo di trasferimento di questa energia è però differente, perché implica la presenza contemporanea di un campo magnetico  $\vec{B}$  e di un campo elettrico. Il risultato finale è ancora una forza elettromotrice, che qui vale  $\varepsilon = vBl$  e che può essere variata modificando qualcuna delle tre grandezze presenti a secondo membro della formula.

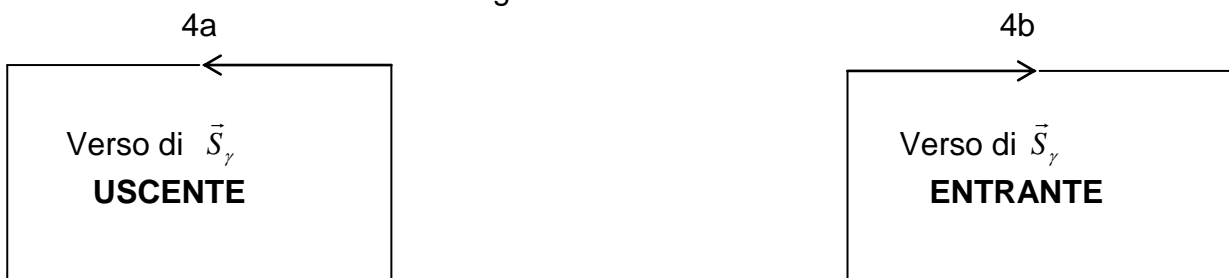
#### 4) Una formulazione generale: la legge di Faraday-Neumann.

Esiste un modo alternativo per collegare  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}$  e la forza elettromotrice indotta considerando ancora la "macchina lineare" del paragrafo precedente: si dimostra facilmente, utilizzando la definizione di flusso magnetico, che  $vBl = \frac{d\Phi_B}{dt}$  dove  $\Phi_B$  è il flusso di  $\vec{B}$  attraverso la superficie  $S_\gamma$  associata a  $\gamma$ . Se infatti al generico istante  $t$  il quadrilatero ABCD ha area  $S$ , dopo un piccolo intervallo  $dt$  l'area è diventata  $S + lvdt$ , da cui la variazione di flusso del campo magnetico vale  $d\Phi_B = BdS = Blvdt$ . Dividendo membro a membro per  $dt$  si ottiene l'uguaglianza cercata. Generalizzando, si può allora tentare di scrivere

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.1)$$

con  $\Phi_B = \int_{S_\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . In realtà sapete che sia il verso di percorrenza di  $\gamma$  che l'orientazione del vettore  $\vec{S}_\gamma$  sono arbitrari; secondo la convenzione accettata da tutti i fisici, non sono però indipendenti ma legati tra loro dalla regola descritta in figura 4: se il verso convenzionale di percorrenza di  $\gamma$  (che influenza il segno della circuitazione!!) è **antiorario** (orario)  $S_\gamma$  avrà per convenzione il verso **uscente** dal (entrante nel) piano in cui giace  $\gamma$  stesso (tale verso influenza invece il segno del flusso !!).

Fig. 4



Con questa convenzione, però, la (4.1) deve diventare

$$\oint_{\gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.2)$$

La (4.2) è detta **legge di Faraday-Neumann dell'induzione elettromagnetica**; il circuito  $\gamma$  prende il nome di **circuito indotto**. Per convincerci della necessità di questo segno meno, consideriamo i due esempi che seguono.

#### a) Generatore lineare.

Scegliendo in fig. 2 il verso convenzionale antiorario di percorrenza del circuito ABCD ,  $\Phi_{\vec{B}} > 0$  e inoltre tale flusso aumenta se il conduttore AB si muove verso destra. Il secondo membro della (4.2) è allora negativo e quindi lo è la circuitazione della forza per unità di carica a primo membro. Le cariche (supposte positive) si muovono allora in senso **orario**, in accordo con quanto dedotto in precedenza.

#### b) Circuito immerso in campo magnetico variabile.

Questo è un caso molto importante, che vale la pena discutere; supponiamo che il circuito ABCD di figura 2 abbia il lato AB bloccato e sia immerso in un campo magnetico avente verso uscente dal piano ABCD , generato da un solenoide percorso da corrente. Supponiamo poi di variare il modulo del campo, ad esempio variando la corrente che percorre il solenoide; scegliamo di nuovo il verso convenzionale di percorrenza del circuito antiorario. Se il modulo di  $\vec{B}$  aumenta,  $\Phi_{\vec{B}} > 0$  e  $\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} > 0$  . Allora, sempre dalla (4.2) la circuitazione della forza per unità di carica è negativa: ciò corrisponde ad una corrente diretta in senso orario. Commenteremo tra pochissimo questo risultato.

La (4.2) ha validità generale: ogni variazione nel tempo del flusso magnetico su  $S_{\gamma}$  comporta la generazione di un campo elettrico con **circuitazione su  $\gamma$  diversa da zero**. (vedete che questo campo ha proprietà del tutto diverse da quello elettrostatico ...). Il flusso magnetico  $\Phi_B$  la cui derivata temporale costituisce il secondo membro della (4.2) può variare in diversi modi. Troverete sul libro di testo esempi importantissimi: la spira che viene inserita in (o tolta da) un campo magnetico non uniforme, la spira ruotante in un campo magnetico uniforme ( varia l'angolo tra  $B$  e  $S_{\gamma}$  e quindi il flusso)...

### 5) La legge di Lenz.

Un aspetto fisicamente molto significativo presentato da tutte queste diverse situazioni risiede nel fatto che il circuito indotto  $\gamma$  , sottoposto alla forza elettromotrice descritta dal secondo membro della (4.2) , **reagisce sempre in modo da opporsi alla causa della F.E.M.** , cioè alla variazione di flusso magnetico. Diamo un esempio di ciò, tornando al nostro generatore lineare: pensate alla catastrofe che si genererebbe con una  $\vec{F}_x$  di verso concorde con quello di  $\vec{v}$  (l'abbiamo già accennato al paragrafo 1). In questo caso infatti  $\vec{v}$  *aumenterebbe sempre di più* (senza bisogno di alcuna  $\vec{F}_e$  !) e di conseguenza aumenterebbe la f.e.m., e quindi  $u$  e la corrente ...un'escalation continua in cui si creerebbe energia dal nulla, salvo riuscire a fermare in qualche modo il conduttore AB in continua accelerazione! Tutto sommato è un bene che questo non sia vero: è troppo



assurdo fisicamente, e fenomeni del genere non sarebbero neppure controllabili. In realtà il generatore lineare reagisce addirittura in due modi per opporsi alla variazione di flusso a secondo membro della (4.2) :

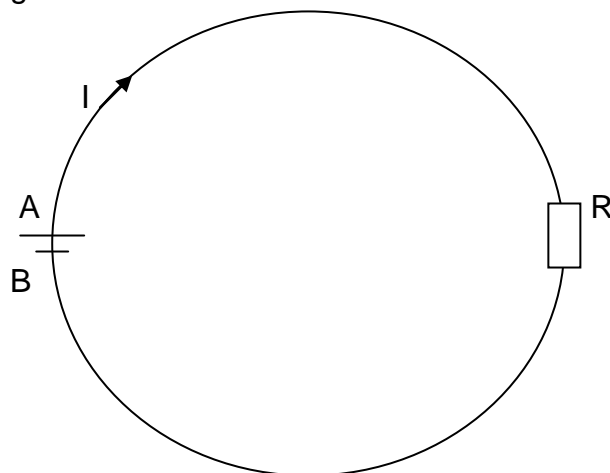
- 1) frena il moto del conduttore AB (**effetto meccanico**);
- 2) il verso della corrente indotta è tale da generare un campo magnetico di verso opposto al campo esterno  $\vec{B}$  inizialmente presente (**effetto elettromagnetico**).

Vi invito a verificare quest'ultimo punto usando la regola della mano destra: scoprirete che il campo generato dalla corrente indotta ha infatti verso entrante in fig. 2 . Questo è esattamente ciò che succede anche nel secondo esempio b) con cui ho commentato la (4.2) : una corrente diretta in senso orario genera infatti un campo magnetico entrante nel foglio, cioè opposto al campo  $\vec{B}$  inizialmente presente. In realtà anche in questo caso la corrente indotta ha un effetto di inerzia di tipo meccanico, con forze sui quattro lati del circuito tendenti a deformarlo diminuendone la superficie e quindi opponendosi alla variazione del flusso magnetico; l'effetto non si manifesta semplicemente perché il circuito è supposto indeformabile, a differenza di quello della macchina lineare in continua. L'effetto "di inerzia" del circuito indotto discusso in precedenza è un aspetto fisico molto importante contenuto nella (4.2) e verificato in tutte le situazioni in cui essa si applica; prende il nome di **legge di Lenz**(si parla a volte di legge di Faraday-Neumann-Lenz) ed è molto utile quando ci si sente in difficoltà con tutte le convenzioni nei versi (di percorrenza di  $\gamma$ , di orientazione di  $S_\gamma$ ...) presenti nella (4.2) . Un'altra situazione fisica importantissima in cui si applica la legge di Faraday-Neumann è quella dell'autoinduzione elettromagnetica, che è interessante sotto diversi aspetti e su cui vale la pena soffermarsi nel prossimo paragrafo.

## 6) Autoinduzione elettromagnetica

Un generatore di f.e.m.  $\varepsilon$  alimenta una spira conduttrice di resistenza  $R$  come in fig. 5. Chiudendo il tasto all'istante  $t = 0$ , inizia a scorrere corrente. Non ci eravamo finora posti, per un circuito resistivo, il problema di quanto tempo occorresse per passare da  $I = 0$  (all'atto della chiusura) e  $I_{fm} = \frac{\varepsilon}{R}$  . In realtà questo tempo non può essere nullo: le cariche devono accelerare da  $v = 0$  alla loro velocità di regime, legata nel modo ben noto a  $I_{fm}$  . Ma attenzione: mentre  $I$  aumenta, cambia anche il campo  $B$  da essa generato, e di conseguenza il flusso  $\Phi_B$  sulla superficie della spira. Questo flusso si chiama "di autoinduzione" perché è generato dalla corrente che scorre nel circuito stesso, a differenza di quello di tutti gli altri esempi precedenti (macchina lineare, spira in moto nel campo di un magnete, spira rotante in campo uniforme...).

Fig. 5



Si può dimostrare che in un circuito  $\Phi_B$  è proporzionale alla corrente  $I$ : il calcolo è semplice se si tratta di un solenoide, dove il valore assoluto del flusso su ogni spira è banalmente  $\Phi_B = BS = \mu_0 \frac{N}{l} IS$ . Su ogni spira allora il valore assoluto della forza elettromotrice indotta è  $\varepsilon_{sp}$  e poiché le  $N$  spire sono in serie ed ognuna ha lo stesso flusso concatenato,  $\varepsilon_{tot} = N\varepsilon_{sp} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \frac{dI}{dt}$ .

Il coefficiente  $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$  si chiama coefficiente di autoinduzione o induttanza della bobina. In generale in un elemento di circuito come una spira o una bobina si può scrivere:

$$\varepsilon_{ind} = L \frac{dI}{dt} \quad (6.1)$$

con  $L$  dipendente dalla geometria dell'elemento del circuito.

Allora scriviamo l'equazione che descrive l'andamento di  $I$  nel tempo calcolando la circuitazione di  $\vec{E}$ . Poiché il nostro circuito è immobile e quindi non c'è moto relativo tra le sue parti come succedeva nella macchina lineare, non c'è bisogno dell'apice per il campo elettrico nella (4.2), che verrà omissis. Indichiamo il verso convenzionale di percorrenza del circuito per il calcolo del lavoro di  $\vec{E}$ ; questo verso coincide con quello scelto come positivo della corrente  $I$ , in modo ragionevole viste le polarità del generatore del disegno.

La circuitazione di  $\vec{E}$ , percorrendo la spira nel verso (orario) scelto, vale, partendo per es. dal punto B:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\varepsilon + RI$$

ma per la (4.2) e la (6.1) si ha:

$$-\varepsilon + RI = -L \frac{dI}{dt} \quad (6.2)$$

Il segno meno a secondo membro è giustificato fisicamente perché se la corrente scorre nel verso convenzionale scelto il campo  $\vec{B}$  è entrante, il suo flusso è positivo perché anche il vettore  $\vec{S}$  è entrante ed aumenta in modulo perché sta aumentando la corrente. Il secondo membro della (4.2) deve essere negativo, come è anche quello della (6.2). Si può ricavare facilmente la dipendenza di  $I$  dal tempo avendo già risolto il problema della carica di un condensatore  $C$  attraverso una resistenza  $R$ :

$$\frac{\varepsilon}{R} = I + \frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt} \quad \leftrightarrow \quad C\varepsilon = Q + RC \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (6.3)$$

si ottiene con gli stessi passaggi

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6.4)$$

con  $\tau = \frac{L}{R}$ . La (6.4) si ottiene "a vista" dalla soluzione per  $Q(t)$  nel problema della carica di un condensatore dato che le equazioni nella (6.3) sono identiche. Il passaggio da zero a  $I(\infty) = \frac{\varepsilon}{R}$  è tanto più repentino quanto più piccola è  $L$ : se  $L \rightarrow 0$  anche  $\tau \rightarrow 0$ .

Commentiamo questi risultati alla luce della legge di Lenz: l'effetto dell'induzione elettromagnetica è un effetto di inerzia, cioè si oppone alla causa che ha generato la f.e.m. indotta. Questa causa è l'aumento della corrente, che fa aumentare  $\Phi_{\vec{B}}$ , la spira vi si oppone come può, cioè ritarda il passaggio di  $I$  da 0 a  $\frac{\varepsilon}{R}$ , che sarebbe avvenuto in un tempo nullo se il circuito fosse stato puramente resistivo (in realtà dato che ogni corrente genera un flusso magnetico, nessun circuito ha induttanza nulla...).

Concludo con una breve trattazione del circuito R-L appena studiato dal punto di vista energetico, che in realtà porta un altro grosso contributo a favore della stretta parentela tra  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Analogamente a quanto fatto per il circuito R-C, impostiamo il bilancio energetico del circuito R-L.

Dalla (6.2), moltiplicando membro a membro per  $I$  si trova:

$$\varepsilon \cdot I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} \quad (6.5)$$

A primo membro c'è la potenza generata (lavoro compiuto per unità di tempo) dalla sorgente di f.e.m.; questa è uguale, secondo la (6.5), alla somma di due contributi: il primo, già noto, è la potenza dissipata sulla resistenza. E il secondo? In cosa si è trasformata, oltre che in calore, l'energia erogata nell'unità di tempo dal generatore? Calcoliamola (vd. anche libro di testo, pag. 18): ricordo che, moltiplicando membro a membro la (6.5) per l'intervallino elementare  $dt$  si ottiene il lavoro compiuto in questo intervallino dal generatore, che si spezza nei due contributi  $RI^2 dt$  e  $LI dI$ . Il primo è già noto e rappresenta l'energia che va a riscaldare il conduttore per effetto Joule; calcoliamo ora la somma dei lavori elementari  $W_L = \int_0^{I_\infty} LI dI$ , che è il solito integrale banale già incontrato in terza e ritrovato per l'energia immagazzinata nel condensatore:

$$W_L = \int_0^{I_\infty} LI dI = \frac{1}{2} LI_\infty^2 \text{ con } I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} ;$$

si ottiene una relazione molto interessante nel caso del solenoide lungo sostituendo i valori di  $I_\infty$  e  $L$  :

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \cdot \left( \frac{B}{\mu_0 N} l \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V$$

con  $V$  volume del solenoide, cioè il volume in cui è presente il campo magnetico. Questa situazione è perfettamente analoga a quella del circuito R-C: qui l'energia per unità di volume "immagazzinata" nel campo magnetico è  $\frac{1}{2\mu_0} B^2$  mentre nel caso perfettamente

analogo del condensatore l'energia era immagazzinata nel campo elettrico tra le armature e valeva  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ . Si può sospettare che la semplicità di questi due risultati sia legata alla

semplicità matematica dei condensatori e dei solenoidi illimitati: in realtà, come è già successo in altre occasioni, tali relazioni sono del tutto generali!  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  contengono dell'energia: essendo campi, cioè grandezze fisiche che si estendono nello spazio, è ragionevole che i valori di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (anzi il quadrato dei loro moduli) siano legati alla densità di energia, cioè all'energia dell'unità di volume. Ci si allontana così dalle vecchie definizioni di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , date così, "per comodità", per arrivare alla scoperta teorica di Maxwell della natura elettromagnetica della luce, che ha avuto poi numerosissime conferme sperimentali. L'ultimo, decisivo sforzo per cogliere la profonda simmetria dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , permettendo finalmente almeno di impostare il concetto di **onda elettromagnetica**, verrà fatto nei prossimi paragrafi.

## 7) Il teorema di Ampère e il "termine mancante".

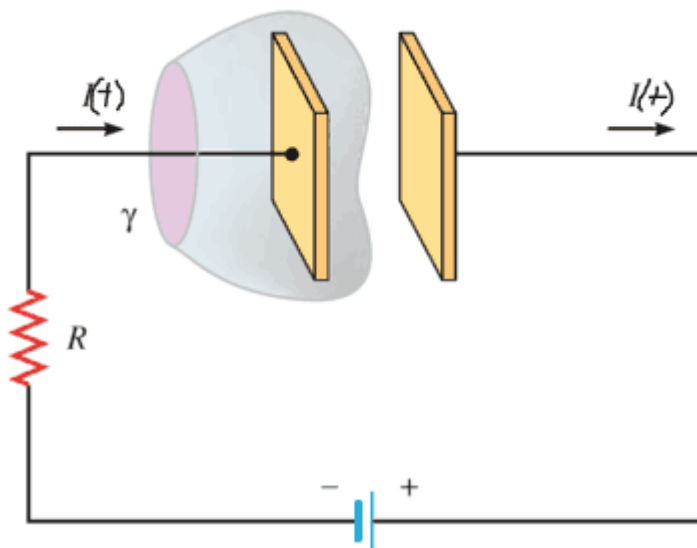


Fig. 6

Si consideri il semplice circuito RC schematizzato in fig. 6: supponiamo che il

condensatore si stia caricando e di conseguenza stia ancora scorrendo una corrente  $I(t)$  non trascurabilmente piccola (qui le frecce corrispondono al verso della velocità media degli elettroni in moto). Maxwell sviluppò una riflessione critica sull'applicazione della legge di Ampère al circuito  $\gamma$  in fig. 6 . Il circuito è stato scelto del tipo più semplice, cioè una qualsiasi circonferenza giacente su un piano ortogonale al filo conduttore e di centro l'intersezione tra il piano e il filo. La legge di Ampère fornisce qui:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I(t) \quad (7.1)$$

Rivedamone in generale il secondo membro: esso deve contenere la somma delle intensità di corrente (qui una sola) dei conduttori filiformi che si intersecano con una superficie  $\Sigma$  avente come contorno  $\gamma$ . Fino a qui non ci siamo mai posti problemi al riguardo perché è sempre stata scelta la superficie piana (che qui chiamo  $\Sigma_1$ ) con contorno  $\gamma$ , che è il cerchio colorato in rosa di fig. 6 ; Maxwell si chiese cosa sarebbe successo scegliendo una arbitraria superficie avente come contorno  $\gamma$ , come ad esempio quella fatta "a tazza" (che qui chiamo  $\Sigma_2$ ) e colorata in grigio in fig. 6 . Con essa invece il secondo membro della (7.1) è nullo perché la superficie (non piana!) "entra nel condensatore" e non ci sono fili di corrente concatenati con essa. Ci sarebbe piaciuta una legge di Ampère con una superficie  $\Sigma$  arbitraria ma a quanto pare ciò non è possibile: scegliendo una superficie come  $\Sigma_1$  la (7.1) funziona ma con una superficie come  $\Sigma_2$  che "scansa il filo" non funziona.

Possiamo analizzare, come fece Maxwell, le due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  e in particolare i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  nei loro punti: nei punti di  $\Sigma_1$  c'è un campo  $\vec{B}$  variabile nel tempo mentre  $\vec{E}$  è praticamente nullo essendo i punti esterni al condensatore (lo tratteremo qui come un condensatore piano ideale anche se nella fig. 6 non lo è). Vediamo i campi nei punti di  $\Sigma_2$  e qui ci sono novità importanti: nei punti esterni al condensatore il campo elettrico è trascurabile, a differenza del campo magnetico; ma all'interno del condensatore, considerando qui (ancora a differenza della fig. 6) la zona interna come una superficie piana, per i punti di questa zona il campo elettrico, come in ogni condensatore piano, è uniforme, diretto ortogonalmente a ogni piastra e evidentemente dipendente dal tempo.

Calcoliamo ora il modulo  $E$  (direzione e verso li sappiamo) nei punti interni; si ha  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

da cui, nell'approssimazione di condensatore piano si ha, dato che  $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ :

$$E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} \quad (7.2)$$

con  $A$  superficie di una piastra. Per il modulo del flusso di  $\vec{E}$  si ha  $\Phi_E = E \cdot A = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$  e calcolando la derivata rispetto al tempo di entrambi i membri si ottiene facilmente:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{I(t)}{\epsilon_0} \quad (7.3)$$

Moltiplicando membro a membro la (7.3) per  $\epsilon_0 \mu_0$  si ottiene finalmente

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 I(t) \quad (7.3 \text{ bis})$$

Con questi passaggi, anche se a prima vista un po' forzati, il secondo membro è quello della (7.1)! Maxwell propose a questo punto che in generale la legge di Ampère si dovesse scrivere

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \left( \sum_i I_i + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (7.4)$$

Nel nostro caso la (7.4) funziona scegliendo come superficie con contorno  $\gamma$  sia  $\Sigma_1$  che  $\Sigma_2$  : con  $\Sigma_1$  infatti è nullo il secondo addendo del secondo membro (perché in  $\Sigma_1$  il campo elettrico è nullo) e con  $\Sigma_2$  è nullo il primo addendo del secondo membro (perché in  $\Sigma_2$  non ci sono correnti concatenate) ; il secondo membro della (7.4) vale  $\mu_0 I(t)$  per entrambe le scelte di  $\Sigma$  . L'ipotesi di Maxwell, che si è rivelata vincente alla prova dei fatti, è che la (7.4) valesse per ogni scelta di  $\Sigma$  . La (7.4) ha un valore importantissimo negli sviluppi finali della teoria, come vedremo nel prossimo paragrafo.

## 8) Onde elettromagnetiche piane

Scriviamo le quattro equazioni fondamentali dell'Elettromagnetismo, la prima in quarta parlando di Elettrostatica, la seconda incontrate nello scorso capitolo sui campi magnetici e le ultime due scritte in forma definitiva in questo capitolo . Sono state definitivamente fissate da James Clerk Maxwell e sono dette appunto equazioni di Maxwell (le rinomino per comodità come 8.1...8.4):

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} \quad (8.1)$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.2)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.3)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \left( \sum_i I_i + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (8.4)$$

In una zona sufficientemente lontana dalle sorgenti di campi elettrici e magnetici (cariche elettriche e circuiti elettrici) sono appunto nulle cariche elettriche e intensità di corrente elettrica; inoltre non occorre l'apice su  $\vec{E}$  nella (8.3) perché siamo nel vuoto e non esistono conduttori mobili percorsi da corrente. Le equazioni di Maxwell si possono allora scrivere in una forma un po' più semplice (e soprattutto molto più simmetrica...):

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.1bis)$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.2bis)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.3bis)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (8.4bis)$$

Tentiamo di discutere qualitativamente le soluzioni di questo sistema. Ragionando sulle antenne a dipolo elettrico (vd. fotocopie allegate, pag. 1299) si poteva supporre, a distanze sufficientemente grandi dalla sorgente, un andamento dei campi elettrico  $\vec{E}$  e magnetico  $\vec{B}$  del tipo onda piana. Applicando le quattro equazioni di Maxwell, con un formalismo matematico non alla nostra portata, si ottengono i risultati seguenti:

- $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dipendono da una sola coordinata, i due vettori sono tra loro ortogonali e ognuno ortogonale alla direzione dell'onda (vedi figura a pag. 58 del testo); se ad esempio si sceglie come verso di propagazione dell'onda quello positivo dell'asse x (vedi fotocopie allegate pag. 1300) si può scegliere  $\vec{E}(0, E_y, 0)$  e  $\vec{B}(0, 0, B_z)$ ;
- dalle equazioni di Maxwell si può dedurre in generale la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.5)$$

Se il campo è generato da un moto di cariche oscillanti con frequenza  $f$ , la soluzione della (8.5) è del tipo

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad (8.6)$$

con  $\omega = 2\pi f$  e  $k$  costante (numero d'onda). Si tratta di un'onda armonica che si propaga nel verso positivo dell'asse x se  $k > 0$ . Sostituendo la (8.6) nella (8.5) si ottiene per la velocità dell'onda  $v = \frac{\omega}{k}$ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.7)$$

che sostituendovi i valori delle costanti fondamentali  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  coincide con la velocità della luce  $c$  nel vuoto:  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ .

Sempre dalle equazioni di Maxwell si può dedurre la stessa equazione per  $B_z$ :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \quad (8.5bis)$$

con identica soluzione

$$B_z = B_0 \cos(kx - \omega t) \quad (8.6bis)$$

- I due vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  della nostra onda elettromagnetica piana risultano quindi in fase tra di loro (vedi disegno in fondo a pag. 1300 della fotocopia allegata e pagg. 58 e 59 del testo). Sempre applicando le equazioni di Maxwell si può poi dedurre per l'onda elettromagnetica piana il seguente fondamentale legame tra le ampiezze  $E_0$  e  $B_0$ :

$$E_0 = c \cdot B_0 \quad (8.8)$$

