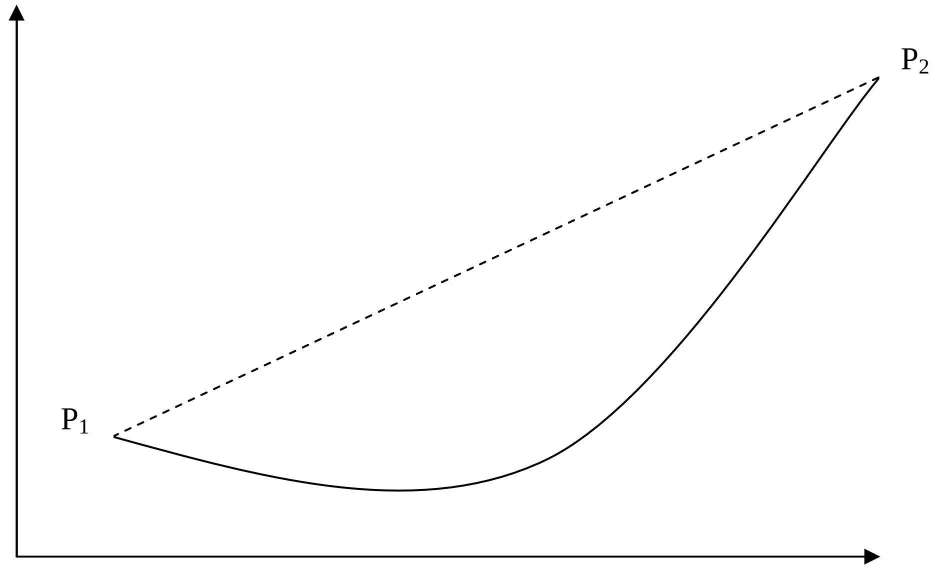
FUNZIONI CONVESSE.

Sia I un intervallo reale (limitato o illimitato, chiuso o aperto); sia poi $f(x)$ una funzione definita in I. Diamo la seguente definizione: $f(x)$ si dice **convessa** in I se, presi arbitrariamente x_1 e x_2 in I, con $x_1 < x_2$, si ha

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_{1)}}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall x \in \left]x_1, x_2\right[\qquad (1)$$

($f(x)$ si dirà concava in I se nella (1) vale il segno di $\geq$).
Il significato geometrico della (1) è che, in un riferimento cartesiano xOy, dati $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$, l'arco del grafico di $f(x)$ compreso tra P_1 e P_2 sta al di sotto del segmento P_1P_2 (vedi fig. sotto).



Enunciamo e dimostriamo ora il teorema fondamentale sulle funzioni convesse. **Sia $f(x)$ derivabile in I: allora $f(x)$ è convessa in I se e solo se $f'(x)$ è non decrescente in I.** Il teorema ha come conseguenza immediata che, se esiste $f''(x)$ in I, $f(x)$ è convessa in I se e solo se $f''(x) \geq 0$ in I (segue dal teorema 5 del cap. 3 del testo applicato a $f'(x)$). Allo stesso modo si può enunciare e dimostrare il "teorema gemello" secondo cui $f(x)$ è concava in I se e solo se $f'(x)$ è non crescente in I; inoltre, se esiste $f''(x)$ in I, $f(x)$ è concava in I se e solo se $f''(x) \leq 0$ in I.

Per dimostrare il teorema occorre riscrivere la (1): essa è equivalente, moltiplicando membro a membro per $x_2 - x_1$, a
$(x_2 - x_1) f(x) \leq f(x_1)[(x_2 - x_1) - (x - x_1)] + f(x_2)(x - x_1)$, cioè
$(x_2 - x_1) f(x) \leq f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)$.
Scrivendo in quest'ultima espressione $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, si ottiene
$[(x_2 - x) + (x - x_1)] f(x) \leq f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)$, cioè
$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1) \leq (x. - x_1)(f(x_2) - f(x))$.

Dividendo quest'ultima espressione membro a membro per $(x_2 - x)(x - x_1)$ che è strettamente positivo per ipotesi, si ha infine:
$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, cioè, moltiplicando numeratore e denominatore del primo membro di quest'ultima uguaglianza per -1 :

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (2)$$

L'uguaglianza (2) è dunque equivalente alla (1) , che, lo ricordiamo, è la definizione di convessità; da questa dimostreremo il teorema.
Infatti, passando al limite nella (2) prima per $x \to x_1$ e poi per $x \to x_2$ si ottiene $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, che esprime appunto il fatto che $f'(x)$ è non decrescente in I per l'arbitrarietà di x_1 e x_2 in I , con $x_1 < x_2$.

Occorre ora infine dimostrare che se $f'(x)$ è non decrescente in I allora $f(x)$ è convessa in I .
Se dunque $f'(x)$ è non decrescente in I allora, se $x_1 < x < x_2$, dal teorema di Lagrange si ha che $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\xi_1)$ e $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$, con ξ_1 e ξ_2 opportuni punti tali che $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Ma, essendo $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ per ipotesi, si ha $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ che è la (2), equivalente alla (1). Il teorema è così dimostrato.

PUNTI DI FLESSO.

Concludo con un'altra fondamentale definizione: si dice che x_0 è un **punto di flesso** (o semplicemente un **flesso**) per la funzione $f(x)$ se esistono $x_1 < x_0$ e $x_2 > x_0$ tali che in $[x_1, x_0]$ $f(x)$ è convessa (concava) e in $[x_0, x_2]$ è concava (convessa).
Dal teorema ora dimostrato risulta che $f'(x)$ è non decrescente (non crescente) in $[x_1, x_0]$ e non crescente (non decrescente) in $[x_0, x_2]$; inoltre, se esiste $f''(x)$ in I , applicando ancora il teorema 5 a $f'(x)$, deve essere $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) in $[x_1, x_0]$ e $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) in $[x_0, x_2]$. Da ciò segue che si deve avere $f''(x_0) = 0$; i flessi vanno dunque cercati **tra gli zeri di** $f''(x)$ (quando questa esiste) come gli estremi relativi vanno cercati tra gli zeri di $f''(x)$.