Cenni di dinamica relativistica

1) Impulso e Energia di una particella

Abbiamo discusso la base della Cinematica relativistica cioè l'invarianza del tempo proprio $\Delta\tau$ per il cambiamento del sistema di riferimento . Ne abbiamo scritto anche la sua espressione infinitesimale, cioè relativa a due eventi dello spaziotempo molto vicini tra loro: abbiamo trovato che, se in un dato sistema di riferimento S tra i due eventi $(x\,,t)$ e $(x+dx\,,t+dt)$ una data particella di massa si muove lungo l'asse x con velocità $v=\frac{dx}{dt}$, il tempo proprio tra i due eventi "infinitamente vicini" ha l'espressione seguente:

$$d\tau = dt\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (1)$$

Elevando al quadrato la (1) si ottiene un'altra espressione molto interessante:

$$c^2dt^2 - dx^2 = c^2d\tau^2 \qquad (1\text{ bis})$$

Definiamo ora l'**impulso** relativistico (che nella Meccanica newtoniana è più spesso chiamato quantità di moto). Nel costruire una nuova teoria fisica, si utilizza molto spesso un principio del tutto ragionevole, detto **Principio di corrispondenza**, che fu in realtà enunciato da Niels Bohr per la meccanica quantistica ma si applica anche alla relatività:

i risultati della meccanica relativistica devono ridursi a quelli della meccanica classica nelle situazioni in cui l'interpretazione classica può essere considerata valida.

Limitandosi ad un moto rettilineo, è stata individuata per l'impulso la seguente espressione compatibile con il principio di corrispondenza:

$$p = m\frac{dx}{d\tau} \qquad (2)$$

che, usando la (1), si può riscrivere nel modo seguente:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2\text{ bis})$$

Supporremo la massa m invariante, cioè non dipendente dal sistema di riferimento: la definiamo infatti come quella misurata nel sistema di quiete della particella (usando la seconda legge di Newton, cioè applicando una piccola forza e dividendo per l'accelerazione misurata). Supporremo anche che per un corpo isolato l'impulso sia costante nel tempo, cioè si conservi, il che significa per la (2 bis) che rimane costante la sua velocità; ciò corrisponde ad ammettere, ragionevolmente, che continui a valere anche in Relatività il primo principio della Dinamica (si fa valere ancora il principio di corrispondenza).

Definiamo ora per il nostro punto materiale di massa m un'altra grandezza fisica fondamentale che chiameremo **energia** della particella:

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau} \qquad (3)$$

che, sempre per la (1), si può riscrivere come

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3\ \text{bis})$$

Osserviamo che per $v = 0$ si ottiene dalla (3 bis)

$$E = mc^2 \qquad (3\ \text{ter})$$

detta **energia a riposo** della particella.

Combinando la (2 bis) e la (3 bis) si ottiene

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4 \qquad (4)$$

Si confronti la (4) con la (1 bis): in entrambe, a primo membro ci sono le combinazioni di grandezze fisiche (spostamento, intervallo di tempo, impulso, energia) che dipendono dal sistema di riferimento, a secondo membro ci sono invece due invarianti. Questo sarà fondamentale nelle applicazioni che seguiranno.

2) Particelle in interazione

Vediamo cosa cambia se il moto non è uniforme, se cioè il corpo è in interazione; ci aspettiamo che E e p varino nel tempo, ma il secondo membro della (4) contiene solo costanti del moto: la massa m e la velocità della luce c sono cioè sia indipendenti dal sistema di riferimento che, in un dato sistema di riferimento, indipendenti dal tempo, cioè costanti del moto. Studiamo il moto usando ancora il principio di corrispondenza, cioè definendo la forza “alla Newton”:

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad (5)$$

Il lavoro elementare della forza, $dL = Fdx$, si scrive allora dalla (5) come

$$dL = vdp \qquad (6)$$

Si può scrivere la (4) nell’evento $(x + dx\,, t + dt)$ come

$$(E + dE)^2 - c^2(p + dp)^2 = m^2c^4 \qquad (4\ \text{bis})$$

Combinando la (4) e la (4 bis), sviluppando i quadrati e considerando trascurabili i termini in dE^2 e dp^2 si ottiene:

$$EdE - c^2pdp = 0 \qquad (7)$$

A questo punto dalle (2 bis) e (3 bis) si ricava

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \qquad (8)$$

e usando la (6), la (7) e la (8) si ottiene finalmente

$$dL = dE \qquad (9)$$

Usando ancora il principio di corrispondenza, supponiamo di poter usare il "teorema delle forze vive" della meccanica newtoniana

$$dL = dT \qquad (9\ \text{bis})$$

con T energia cinetica del corpo. Avremo quindi

$$dE = dT \qquad (9\ \text{ter})$$

Si potrà scrivere allora per l'energia cinetica relativistica

$$E = T + cost \qquad (10)$$

cioè E e T differiscono per una costante.

Supporremo ancora in base al principio di corrispondenza che per $v = 0$ si debba porre $T = 0$ da cui usando la (3 bis) si ottiene

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \qquad (10\ \text{bis})$$

Abbiamo così finalmente ottenuto l'espressione della **energia cinetica relativistica.**

La (10 bis) può a prima vista spaventare un po', ma possiamo usare un'altra formuletta approssimata (ancora uno sviluppo in serie di Taylor) per riscriverla nel caso di velocità piccole rispetto alla velocità della luce, cioè per $\frac{v}{c} \ll 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (11)$$

Ponendo la (11) nella (10 bis) ovviamente per $x = \frac{v}{c}$ quest'ultima diventa

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (12)$$

come doveva essere per il principio di corrispondenza.

3) Energia delle particelle in relatività e unità di misura

La dinamica relativistica attribuisce ad una particella di massa m l'energia data dalla (3 bis): $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Perché la (3 bis) abbia senso occorre che $v < c$; inoltre, fatto considerato scontato nella meccanica newtoniana, la massa di una particella elementare come quelle dei costituenti atomici (protoni, elettroni, neutroni) è una grandezza fisica espressa da un numero strettamente positivo, cioè $m > 0$. Nei primi anni del '900 è stata scoperta un'altra particella in seguito a fondamentali lavori teorici e sperimentali: il

FOTONE (nome usato per la prima volta, pare, dall'americano Lewis nel 1926) ; la scoperta prese la mosse dalle ipotesi del tedesco **Max Planck** sulla quantizzazione del campo elettromagnetico (1900) secondo cui un'onda elettromagnetica (come la luce) si deve pensare composta da quanti di energia, cioè pacchetti d'onda discreti ognuno appunto con una propria energia. Dopo i lavori sperimentali sull'effetto fotoelettrico (Lenard, 1902) e la loro interpretazione da parte di Einstein (1905) che gli valse il premio Nobel nel 1921, fu proposta da Einstein stesso la formula dell'energia di un fotone:

$$E = h\nu \qquad (13)$$

dove ν è la frequenza (scusate se uso questo simbolo invece di f ma è quello che troverete più spesso all'Università) del fascio di radiazione monocromatica e h è una costante fondamentale introdotta da Planck che vale $h = 6.6 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ e detta appunto **costante di Planck**. Poiché ovviamente un fotone si muove alla velocità della luce, essendo stato concepito come particella non si può usare per esso la (3 bis) perché la sua energia diventerebbe infinita; questa divergenza si elimina soltanto attribuendo al fotone **massa nulla**, cioè $m = 0$, il che autorizza a adottare un procedimento totalmente nuovo come fu quello di Planck e Einstein per determinarne l'energia.

Notiamo che con la scelta $m = 0$ per i fotoni dalla (4) e la (11) si determina anche l'impulso con la relazione

$$p = \frac{h\nu}{c} \qquad (14)$$

La (13) e la (14) sono coerenti con tutti (!) i fatti sperimentali finora noti: ogni onda elettromagnetica (monocromatica) si comporta come un fascio di fotoni ognuno avente un'energia data dalla (13) e un impulso dato dalla (14).

Diamo ora la definizione della nuova unità di misura di energia utilizzata per tutte le particelle elementari e in particolare nelle nostre applicazioni, cioè per protoni, neutroni, elettroni e fotoni. Si dice **elettronvolt** (in sigla eV) l'unità definita nel seguente modo:

$1\ eV$ è il lavoro compiuto dalla forza elettrica per superare la differenza di potenziale di $1\ V$; il fattore di conversione con l'energia del sistema MKSA è quindi:

$1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1\ V = 1{,}6 \cdot 10^{-19} J$; tale unità di misura, come si potrà vedere nelle applicazioni, è comodissima per i calcoli. Consideriamo ad esempio la (13) e trasformiamola nel seguente modo: da $E = h\nu$ si ricava, usando la relazione $\lambda\nu = c$:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad (14\ \text{bis})$$

Da quest'ultima, sostituendo i valori numerici delle due costanti fondamentali c e h si ottiene, ricordando l'unità di misura di lunghezza Angstrom $1\ \dot{A} = 1 \cdot 10^{-10} m$:

$$E \cdot \lambda = 12400\ (\ eV \cdot \dot{A}) \qquad (15)$$

Osservo che, come vedremo tra poco nella trattazione della teoria di Bohr per l'atomo di idrogeno, l'Angstrom è l'unità di misura naturale delle dimensioni atomiche; $1\ \dot{A}$ è anche l'ordine di grandezza della lunghezza d'onda dei fotoni nei raggi X (da cui dalla (15) l'energia di un fotone dei raggi X è dell'ordine di $1\ keV$ o superiore) , $5000\ \dot{A}$ è la lunghezza d'onda tipica dei fotoni della luce visibile (da cui dalla (15) l'energia di un fotone nel visibile è dell'ordine di $1\ eV$).

Concludiamo valutando le energie in elettronvolt per la (3 ter): ad esempio l'energia a riposo di un elettrone vale $0.51\ \cdot 10^6 eV$ cioè circa $0.5 MeV$ (quella di un protone $938 MeV$ cioè circa $1\ GeV$, quella di un neutrone $939\ MeV$, quella di un muone $106\ MeV$); come si vede queste quattro energie sono di diversi ordini di grandezza maggiori di quelle dei fotoni della luce visibile. La grande comodità dell'unità di misura elettronvolt risiede anche nell'esprimere in eV il lavoro di una forza elettrica su una particella avente una carica di modulo la carica elementare (come elettroni, protoni e anche i nostri muoni…). Pensiamo in particolare all'uso della (9) $dL = dE$: risulta possibile utilizzare anche per le particelle elementari la formula dell'elettromagnetismo classico del lavoro della forza elettrica su una carica $L = q \cdot \Delta V$; si ottiene allora, sommando (integrando) i contributi elementari della (9), la semplice formula seguente:

$$q \cdot \Delta V = \Delta E \qquad (16)$$

Ma per le nostre cariche elementari il primo membro della formula **usando l'unità di misura elettronvolt** vale semplicemente ΔV , cioè tipicamente il dato iniziale fornito negli esercizi; si può utilizzare allora in modo relativamente semplice la (16) in combinazione con la (3 bis) per ricavare ad esempio le velocità massime delle particelle con l'applicazione di arbitrarie differenze di potenziale. Insomma vedrete che nelle applicazioni a fotoni e particelle accelerate da campi elettrici statici vi convincerete subito della comodità dell'adozione di questa unità di misura.

Conclusione definitiva: naturalmente per velocità $v \ll c$ si usano tranquillamente la (9 bis) e la (12) e siamo autorizzati ad usare la formula del teorema delle forze vive "classico" per le particelle cariche non relativistiche:

$$q \cdot \Delta V = \Delta \mathrm{T} \qquad (16\ \text{bis})$$

con $T = \frac{1}{2} m v^2$ come abbiamo sempre fatto l'anno scorso.