

Cenni di Cinematica Relativistica

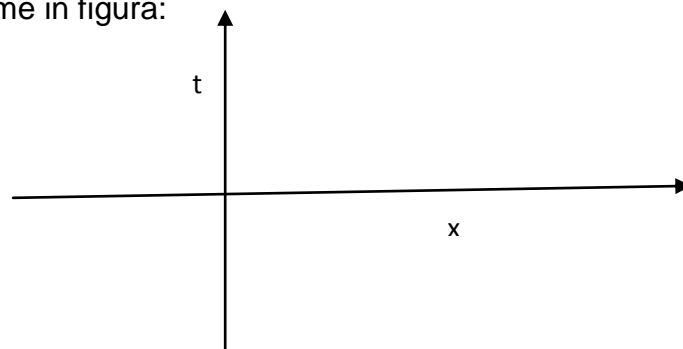
1) Eventi nello spazio-tempo

Vogliamo studiare l'evoluzione di semplici sistemi fisici applicando i principi della teoria della relatività. Lo faremo descrivendo sistemi che ci sono familiari fin dall'inizio del nostro studio della fisica, come il moto di un treno in prossimità di una stazione ferroviaria, di un aeroplano in un viaggio intercontinentale o di un'astronave in un viaggio interplanetario; ci interesserà introdurre anche sistemi la cui descrizione ha bisogno di elementi nuovi, come ad esempio l'emissione e ricezione di un impulso luminoso o il moto di una particella elementare instabile. Anche se ci aspettiamo differenze quantitative di comportamento tra i primi tre casi elencati e gli ultimi due, legate come minimo ai diversi ordini di grandezza delle velocità dei moti, vogliamo costruire una teoria che funzioni per ognuno dei cinque e che comunque si riduca alla meccanica newtoniana, che già conosciamo, per velocità del sistema piccole rispetto a quella della luce.

Diamo ora il concetto di **evento**, su esempi concreti del tipo di quelli dell'elenco che segue:

- a)Transito di un dato treno nella stazione di Pontedera;
- b)Atterraggio di un dato aereo di linea all'aeroporto di Fiumicino;
- c) impatto di una navicella spaziale sulla superficie lunare;
- d) emissione di un impulso luminoso da una data sorgente nel nostro laboratorio;
- e) rivelazione di un muone generato nell'alta atmosfera per collisione di raggi cosmici da parte di un rivelatore del dipartimento di fisica dell'università di Pisa.

Per descrivere ognuna di queste situazioni concrete "elementari", che chiameremo **evento** (attenzione: il significato del termine è qui completamente diverso da quello usato in teoria della probabilità!), occorreranno due dati: il punto dello spazio fisico e l'istante associati ad essa. In realtà abbiamo già una certa familiarità con il concetto di evento appena definito: nello studio del moto rettilineo di un punto materiale, abbiamo usato i grafici posizione-tempo, nei quali ogni punto P del grafico corrisponde per l'appunto ad un evento, cioè $P(t; x)$ con t istante e x posizione del punto materiale in quell'istante. In relatività si preferisce per un moto rettilineo invertire le coordinate, per cui descriveremo un evento, o come si dice un punto dello spazio-tempo $P(x; t)$, usando un riferimento cartesiano $x - t$ come in figura:



Inizieremo il nostro studio enunciando un postulato fondamentale che chiameremo per comodità “principio 1”: “La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento in moto relativo con vettore velocità costante”.

Indicheremo con c il modulo della velocità della luce nel vuoto, che vale con ottima approssimazione $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ e che per il principio appena enunciato è una delle costanti fondamentali della fisica.

Questo postulato, enunciato da Einstein nel 1905, è in contraddizione palese con la legge di composizione delle velocità studiata in terza, per la quale, se \vec{V} è la velocità di un riferimento S' rispetto al riferimento S e \vec{v} e \vec{v}' sono le rispettive velocità in S e S' , si ha

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (1)$$

Si avrebbe infatti, se nella (1) \vec{v} è la velocità della luce nel riferimento S , $\vec{v} = \vec{v}'$ per il principio 1 e $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ che è falsa perché per ipotesi $V \neq 0$. Chiaramente dovremo decidere se cambiare la (1), cioè di fatto la meccanica newtoniana, o il principio 1: per ora continuiamo ad applicare quest'ultimo senza preoccuparci della (1), ne ripareremo al momento opportuno.

2) Orologio a luce e tempo proprio

Si consideri il sistema fisico schematizzato in fig. 1, che chiameremo **orologio a luce**: una sorgente (puntiforme) L che emette un segnale luminoso in direzione ortogonale a uno specchio S a distanza h da L . Lo specchio riflette il segnale fino a un rivelatore R posto nelle immediate vicinanze di L , come in fig. 1, che può trasmettere istantaneamente a L il comando per l'emissione di un nuovo segnale e far funzionare così il nostro sistema per un tempo arbitrario.

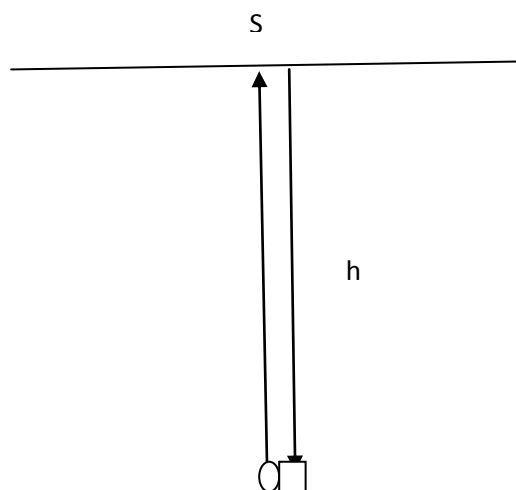


Fig. 1

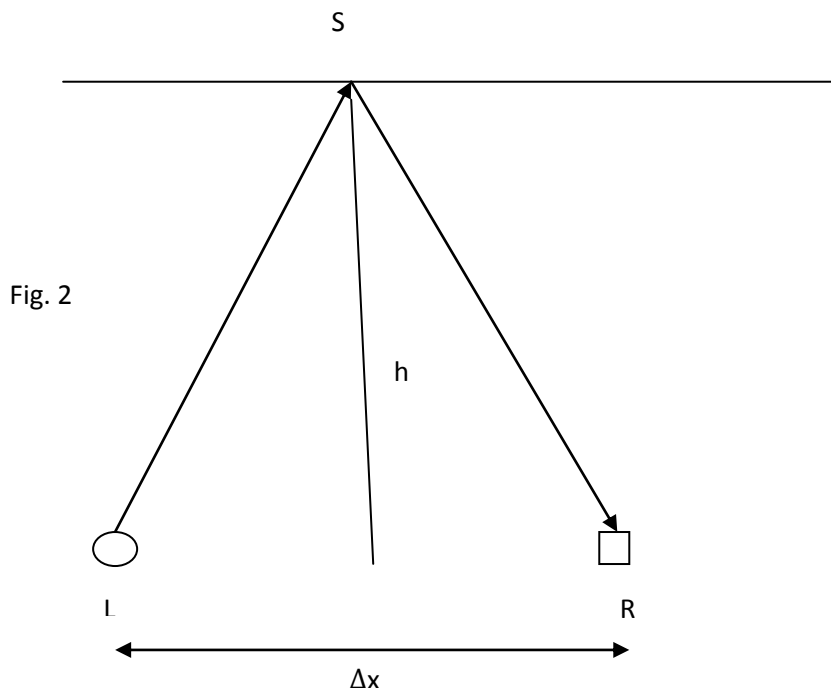
L R

L'intervallo di tempo tra emissione e rivelazione di un segnale, che chiameremo $\Delta\tau$, vale:

$$\Delta\tau = \frac{2h}{c} \quad (2)$$

Osserviamo che $\Delta\tau$ è l'intervallo di tempo tra i due eventi "emissione del segnale" e "ricezione del segnale" misurato nel sistema di riferimento (o più brevemente riferimento, termine che è già stato usato in precedenza e preferito dai fisici) in cui l'orologio a luce è in quiete, o come si dice nel **sistema di quiete** dell'orologio a luce. Se il sistema dispone di un congegno che conta i comandi di emissione del segnale successivo, l'orologio a luce può effettivamente funzionare da orologio: l'intervallo di tempo segnato dall'orologio a partire dall'istante (e dall'evento) della prima emissione è $n\Delta\tau$ se vengono contati n comandi; $\Delta\tau$ funge così da "unità di tempo" del nostro "orologio digitale".

Supponiamo ora che l'orologio a luce si muova con velocità \vec{v} (diretta verso destra come in fig.2) rispetto al nostro laboratorio:



Il percorso LSR, che in fig. 1 era quello "andata e ritorno", è ora nel riferimento

del laboratorio formato da due segmenti, trasversali e non verticali, come in fig.2: la distanza complessiva percorsa dalla luce, per il principio 1, vale $c\Delta t$, dove Δt è il tempo

complessivo emissione-ricezione. Ma applicando il teorema di Pitagora si ottiene banalmente usando la (2):

$$c\Delta t = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2\Delta\tau^2 + \Delta x^2} \quad (3)$$

da cui

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} \quad (3 \text{ bis})$$

Notiamo un fatto del tutto nuovo: l'intervallo di tempo $\Delta\tau$ è quello tra i due eventi emissione del segnale-ricezione del segnale nel riferimento di quiete dell'orologio a luce; l'intervallo di tempo Δt nelle (3) è quello tra gli stessi due eventi in un riferimento diverso, cioè quello del laboratorio. Dalla (3 bis) i due tempi sono diversi: Δt è maggiore di $\Delta\tau$, semplicemente perché la velocità della luce è la stessa nei due riferimenti (principio 1) ma il tragitto percorso (confrontare le figg. 1 e 2) è diverso. Notiamo poi che se la velocità dell'orologio a luce è $v' \neq v$ e quindi la distanza LR nella fig. 2 cambia di conseguenza, chiamando $\Delta x'$ tale distanza e ripetendo i calcoli che hanno portato alle (3), necessariamente con un nuovo (!) $\Delta t'$, si ottiene ancora

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t'^2 - \frac{\Delta x'^2}{c^2}}$$

La conclusione è che $\Delta\tau$, intervallo di tempo tra i due eventi segnato dall'orologio a luce, è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento in moto relativo con velocità costante; si dice che è **invariante** per il cambiamento del sistema di riferimento (brevemente, che è un invariante) come lo è la velocità della luce nel vuoto. Possiamo misurare $\Delta\tau$, che è legato a parametri oggettivi come la distanza h e la velocità della luce, e leggerlo sul quadrante dell'orologio a luce come $n\frac{2h}{c}$; l'informazione può essere comunicata a qualunque altro laboratorio (riferimento) in moto rispetto all'orologio. Chiameremo l'invariante $\Delta\tau$, il tempo segnato dall'orologio a luce, **tempo proprio**.

Un'analogia molto interessante che si può brevemente illustrare è quella tra la geometria dello spazio-tempo, descritta dalla (3 bis), e la geometria euclidea: dati due punti A e B del piano euclideo, se ne può misurare la distanza $\Delta l = \overline{AB}$ (la cui esistenza e unicità è garantita da opportuni assiomi) con l'apposito strumento (metro). Si può anche istituire un arbitrario sistema di riferimento Oxy in un piano contenente A e B e calcolare, date le coordinate cartesiane di $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, la distanza $\Delta l = \overline{AB}$ con la ben nota formula

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (4)$$

con $\Delta x = x_B - x_A$ e $\Delta y = y_B - y_A$. Cambiando il sistema di coordinate, le coordinate cartesiane dei punti A e B cambiano ma Δl non varia; vale ancora

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

La distanza tra due punti Δl (qui nel piano, cioè in due dimensioni) è un invariante come lo il tempo proprio $\Delta\tau$ nello spazio-tempo (anche qui in due dimensioni, cioè con una sola coordinata spaziale) ; la differenza essenziale sta nella presenza del segno meno nella (3bis) rispetto alla (4).

Un ultimo sforzo di generalizzazione della formula (3 bis) è fondamentale per la fisica che stiamo studiando: se v è la velocità dell'orologio a luce (vedi ancora la fig. 2) , sarà $\Delta x = v\Delta t$ da cui, sostituendo nella (3 bis) si ottiene

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

Possiamo usare la (5) per lo studio del moto di una particella che si muove con velocità v : il "suo" tempo proprio $\Delta\tau$ è quello misurato da un orologio in quiete rispetto ad essa, o come si dice solidale con essa (diciamo il nostro orologio a luce, ma se non c'è, e ovviamente non c'è, ce lo immaginiamo...) . E se la velocità della particella non è costante? Si può ancora usare la (5) in un intervallo di tempo dt centrato nel generico istante t , abbastanza breve da poter considerare la velocità come costante (e uguale alla velocità istantanea $v(t)$ e sommare (integrare...) tutti i contributi. Si ottiene per il tempo proprio tra due eventi A e B :

$$\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad (5 \text{ bis})$$

Non useremo esplicitamente la (5 bis) nelle applicazioni, ma la dovremo citare comunque nel prossimo paragrafo.

3) Alcune applicazioni

3a) La rivelazione dei muoni

Una particella instabile può decadere secondo la legge del decadimento esponenziale, con le modalità di seguito brevemente descritte. Se una certa regione di spazio contiene ad un dato istante N_0 particelle instabili, tutte praticamente immobili in un dato riferimento, detto $t = 0$ tale istante in quel riferimento (sistema di quiete delle particelle) , l'evoluzione temporale delle N_0 particelle ha la legge seguente:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

con τ costante positiva detta **vita media** della particella.

Fatta questa premessa, discutiamo il comportamento di particelle elementari dette **muoni**, teorizzate verso la metà degli anni '30 e studiate sperimentalmente negli anni successivi. Il muone è una particella con proprietà del tutto simili a quelle dell'elettrone ma ha una massa circa 100 volte superiore e soprattutto, a differenza dell'elettrone, è una particella instabile con vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} s$. Sono prodotti muoni dall'interazione tra raggi cosmici (principalmente protoni di alta energia) e nuclei di molecole presenti nell'atmosfera terrestre; i muoni prodotti hanno velocità molto vicine a quella della luce.

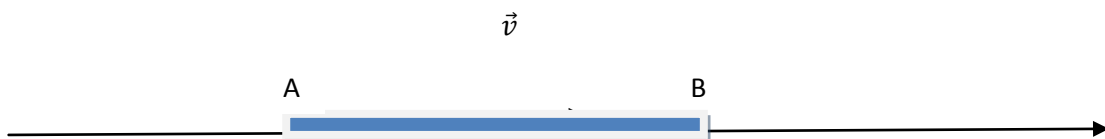
Discutiamo la possibilità di rivelare in un laboratorio terrestre muoni prodotti dai raggi cosmici, cioè generati nell'alta atmosfera a distanza diciamo $d \cong 10^4 m$ dalla crosta terrestre. La loro velocità vale $v_\mu = 0.9994c$; in un riferimento solidale ad un laboratorio terrestre l'intervallo di tempo tra la generazione di un muone e la sua rivelazione (che possiamo chiamare tempo di volo) vale $\Delta t = \frac{d}{v_\mu} \cong 3 \cdot 10^{-5} s$. Usando questo ultimo risultato e la (7) si otterrebbe una percentuale di muoni giunti a terra del tutto trascurabile ($\frac{N}{N_0} \cong e^{-15}$) e sarebbe impossibile rivelare muoni. I muoni provenienti dall'alta atmosfera vengono invece rivelati agevolmente nei laboratori di tutto il pianeta; ciò si spiega altrettanto agevolmente con il fatto che τ è la vita media di un muone nel suo sistema di quiete. Se infatti Δt è un intervallo di tempo corrispondente al tempo di volo valutato nel sistema di riferimento del rivelatore alla superficie terrestre, il corrispondente tempo

proprio del muone vale secondo la (5) $\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}$ e si ottiene nel nostro caso

$\Delta\tau \cong 1.2 \cdot 10^{-6} s$. La percentuale di "muoni sopravvissuti" è quindi in realtà $e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau}} \cong 0.52$ e ciò è in pieno accordo con quanto osservato, prima netta conferma da noi incontrata della teoria della relatività.

3b) La "contrazione delle lunghezze"

Consideriamo un sistema di riferimento S e una barra di lunghezza L in quiete in S come in figura:



Dette A e B le estremità della barra, nel riferimento S si ha ovviamente $\overline{AB} = L$. Ho evidenziato nel disegno solo l'asse x per il riferimento S e ho disegnato la barra su quest'asse; vogliamo discutere se e come varia la lunghezza di una barra misurata in due riferimenti in moto relativo con vettore velocità avente la direzione della barra. Vediamo ora cosa succede osservando le cose da un riferimento S' avente vettore velocità \vec{v} disposto lungo l'asse x e verso scelto da sinistra verso destra come in figura; l'asse x' è quindi sovrapponibile all'asse x, non ci sarà comunque qui bisogno di usare esplicitamente riferimenti cartesiani, non importa per esempio di definirne le origini. Per fissare le idee, supponiamo ora che la barra AB sia il marciapiede di una stazione

ferroviaria e quindi il riferimento S sia in quiete rispetto alla stazione; il riferimento S' si trova invece su un treno che sta viaggiando (e ovviamente attraversando la stazione) con velocità \vec{v} (e quindi modulo v) come in figura.

Nel riferimento S si compie la misura della lunghezza della barra misurando l'intervallo di tempo Δt tra gli eventi "arrivo del treno in A" e "arrivo del treno in B"; si ottiene $\Delta t = \frac{L}{v}$ da cui $L = v\Delta t$. Osserviamo che Δt non è un tempo proprio, perché è misurato nel riferimento S usando due orologi differenti, uno posto all'inizio e uno alla fine del marciapiede.

Il riferimento S' vede la stazione avvicinarsi con velocità ancora di modulo v e calcola la lunghezza della barra, cioè del marciapiede, che chiameremo L' , misurando ancora l'intervallo di tempo tra i due eventi "arrivo del treno in A" e "arrivo del treno in B"; qui il tempo misurato è un tempo proprio, perché misurato nella stessa posizione e dallo stesso orologio in S'.

Si ha dunque per la (5) $\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ma $L' = v\Delta\tau$ perché lo sperimentatore sul treno vede passare la barra con velocità di modulo v , da si ottiene subito

$$L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (8)$$

La (8) è la formula cercata ed esprime la cosiddetta **contrazione delle lunghezze**; è chiamata così per ovvi motivi, infatti $L' < L$.

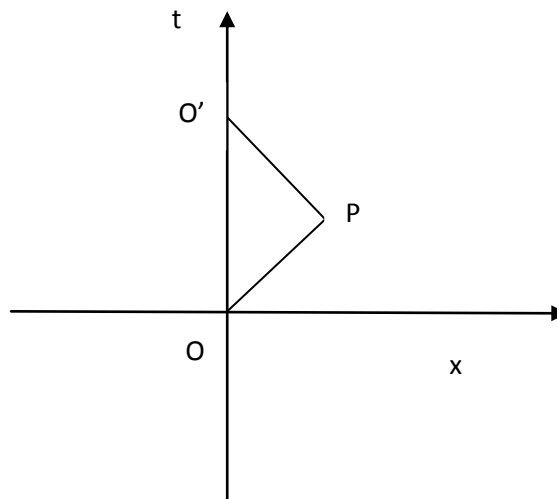
E' del tutto chiaro che la (8) è una diretta conseguenza dalla (5), cioè del concetto di tempo proprio, che è in realtà il fulcro della teoria. Approfitto infine per utilizzare la (8) nel descrivere in modo formalmente diverso (ma del tutto equivalente) l'esperimento dei muoni: il muone, in moto come già visto con velocità $v = 0.9994c$, deve percorrere la distanza tra il punto in cui è "nato" (nell'alta atmosfera) e quello in cui è rivelato (a terra), cioè diciamo $L = 10 \text{ Km}$. Il muone è l'equivalente dello sperimentatore in moto sul treno, con il proprio orologio "biologico" che smette (in media) di funzionare dopo un tempo $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ dalla sua generazione causa decadimento della particella. Per il muone però la distanza percorsa è quella "contratta" data dalla (8), cioè $L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; la velocità della Terra che gli va incontro ha modulo $v = 0.9994c$ e l'intervallo di tempo da lui misurato è quindi $\frac{L'}{v}$ che con i dati qui utilizzati vale ancora ovviamente $1.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

3c) Il "paradosso dei gemelli"

Supponiamo di avere un'astronave costruita per lunghi viaggi nello spazio, con un pilota V (V sta per "viaggiatore") e soprattutto un orologio (diciamo il nostro orologio a luce) funzionante all'interno dell'astronave. Supponiamo che V parta da una base spaziale posta in un punto O della superficie terrestre per compiere un viaggio con velocità \vec{v} costante (in realtà ci sarà la solita fase di accelerazione, che trascureremo) percorrendo

una distanza d , per arrivare a un dato punto P del sistema solare a distanza dell'ordine di quella terra-sole (diciamo $d = 1 \cdot 10^{11} m$). Nella base spaziale il controllore di volo C (C sta per "controllore"), fratello gemello di V , dispone di un orologio identico a quello sull'astronave, che sincronizza con quello di V all'istante della partenza per il viaggio. Raggiunto il punto P , l'astronave inverte immediatamente il moto (anche qui trascuriamo tutte le fasi di accelerazione) tornando alla base con velocità $-\vec{v}$. Descriviamo i viaggi nello spazio-tempo di C e V tracciandone i due grafici posizione-tempo (vedi fig. 3):

Fig. 3



Il segmento verticale OO' rappresenta il viaggio nello spazio-tempo di C , il segmento OP il viaggio di andata di V e il segmento PO' il viaggio di ritorno di V . Sappiamo che sia l'orologio di C che quello di V segnano il tempo proprio del loro viaggio nello spazio-tempo da O a O' : per l'orologio di C il viaggio andata-ritorno è durato $\Delta\tau_C = \frac{2d}{v}$ e per l'orologio di V è durato per la (5) $\Delta\tau_V = \frac{2d}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. (avremmo dovuto usare la (6) ma stiamo trascurando tutte le accelerazioni).

Dalle due formule si vede chiaramente che $\Delta\tau_C > \Delta\tau_V$, cioè il tempo segnato dal gemello controllore di volo è maggiore di quello segnato dal gemello viaggiatore; la differenza tra i due intervalli di tempo e anche il loro ordine di grandezza dipendono dal modulo v

della velocità rispetto a c . Un'astronave con equipaggio umano può raggiungere i $10^4 m/s$;

$\Delta\tau_C$ può valere quindi usando questi numeri $\frac{2 \cdot 10^{11}}{10^4} = 2 \cdot 10^7 s \cong 231 gg.$. Il fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

qui è molto vicino a 1; calcolando $\Delta\tau_V$ si ottiene (provate con la calcolatrice tascabile) un valore minore di quello di $\Delta\tau_C$ di circa $10^{-2} s$; il gemello C è "invecchiato" rispetto al gemello V di un centesimo di secondo in un viaggio dell'ordine di un anno...! In realtà in un viaggio interplanetario come questo, correzioni per la (6) a parte, intervengono effetti quantitativamente più importanti considerando anche l'applicazione della teoria ai campi gravitazionali (relatività generale).

Concludendo, se il viaggio fosse stato compiuto invece a velocità dell'ordine di c avrebbe potuto essere più breve (la luce per fare il tragitto terra-sole ci mette 8 minuti...) e la

differenza relativa tra i due tempi molto maggiore, in quanto il fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ può essere nettamente diverso da 1 ; il fatto è che possiamo mandare muoni a velocità dell'ordine di quella della luce, anzi ci pensano da soli, ma è per ora prematuro mandarci esseri umani.

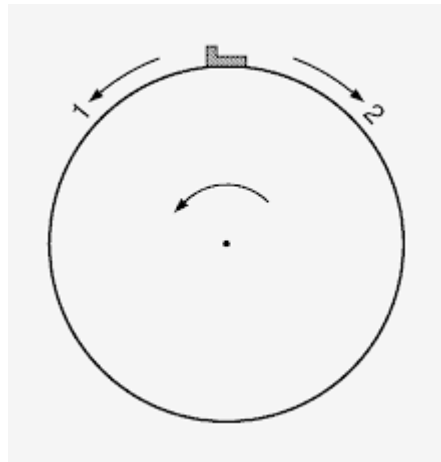
3d) L'esperimento di Hafele e Keating

Un esperimento invece effettivamente realizzato che ha avuto successo utilizzando tecnologia "non avveniristica" è stato quello di Hafele e Keating (1971) ; vale la pena di analizzarlo brevemente.

Furono montati due orologi al cesio (orologi atomici, della massima precisione con la tecnologia a disposizione) in due diversi aerei di linea, che, partendo dallo stesso punto e avendo sincronizzato gli orologi al momento della partenza, fecero entrambi il giro del mondo , uno viaggiando verso est e l'altro viaggiando verso ovest. Alla fine del viaggio, durato circa 50 ore, quando gli aerei si ritrovarono al punto di partenza, l'aereo che aveva viaggiato verso ovest era avanti rispetto all'altro (per l'esattezza, era avanti di 332 ns) . Vediamo di capire perché: anche qui si tratta del confronto di due viaggi nello spazio-tempo, realizzati da due viaggiatori reali (due orologi atomici identici all'interno di due aerei identici ma su due rotte diverse), con uguali eventi iniziale e finale e con tempi propri in linea di principio differenti segnati dai singoli orologi, che furono calcolati, misurati e confrontati.

Per dare un'idea di questo calcolo, occorre apportare varie semplificazioni: supporremo due rette equatoriali (con la Terra pensata sferica di raggio R), effettuate dai due aerei alla stessa quota e con velocità costante. Nessuna di queste condizioni era verificata nell'esperimento reale: gli aerei partirono da Washington e percorsero le rotte usuali; inoltre era impossibile per ovvi motivi mantenere la stessa quota e la stessa velocità. Per tener conto di ciò bisogna usare la (5 bis) e operare le altre correzioni legate al cambiamento di quota degli aerei, dovute all'applicazione della teoria in presenza della gravità (relatività generale) già accennate in precedenza. Naturalmente, si tenne adeguatamente conto di tutti questi fattori nell'elaborazione dei dati ottenuti, confermando le previsioni entro gli errori sperimentali. Torniamo all'esperimento e alle nostre supposte rotte equatoriali: Chiamo aereo 1 quello che si muove da ovest a est (in senso antiorario) e aereo 2 quello che si muove da est a ovest (in senso orario) (vedi fig. 4)

Fig. 4



Poiché la Terra ruota con velocità angolare ω in un sistema di riferimento non ruotante, chiamiamolo S, solidale all'asse terrestre (e diciamo con origine nel polo nord), chiamiamo $u = \omega R$ la velocità periferica di un qualunque punto all'equatore in quiete rispetto alla crosta terrestre e quindi ruotante con la Terra. Si ottiene $u \cong 460 \text{ m/s}$ e, poiché i due aerei di linea viaggiano entrambi rispetto all'aeroporto con velocità $v \cong 220 \text{ m/s}$, la velocità dell'aereo 1 vale nel riferimento S $u + v$ e la velocità dell'aereo 2 vale $u - v$ (è da notare che hanno entrambe verso antiorario in S (viste dall'emisfero nord), cioè da ovest verso est...). Faccio notare che per calcolare queste due velocità ho usato la (1) perché funziona ancora benissimo per velocità molto minori di c . Detto Δt l'intervallo di tempo tra i due eventi partenza e arrivo degli aerei, intervallo calcolato nel riferimento S, si ha $\Delta t = 1.8 \cdot 10^5 \text{ s}$ e $u = 465 \text{ m/s}$. Si calcola poi la velocità degli aerei rispetto al riferimento S, che vale con i dati a disposizione $v = \frac{2\pi R}{\Delta t} = 222 \text{ m/s}$.

A questo punto i tempi propri degli aerei 1 e 2 si possono scrivere in un'unica formula:

$$\Delta\tau_{1,2} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{(u \pm v)^2}{c^2}} \quad (9)$$

Come nel caso del paragrafo precedente, anche qui abbiamo due tempi propri, evidentemente diversi osservando la (9), ma con una differenza molto piccola a causa dei secondi addendi dei due radicandi; tenendo conto di tutte le correzioni a cui si è fatto cenno (e non solo) fu possibile a Hafele e Keating calcolare e misurare $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1$, ottenendo entro gli errori sperimentali l'accordo tra il valore calcolato e quello misurato $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = (332 \pm 20) \text{ ns}$, ottenibile ovviamente solo con orologi estremamente precisi come i due orologi atomici montati sui due aerei.

Un'ultima osservazione: usando la formula approssimata (9) e calcolando $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1$ con i dati a nostra disposizione, con la calcolatrice tascabile per ottenere un risultato diverso da zero ci vuole una macchinetta con almeno 13 cifre significative, con quelle normali non ci si fa. Ma c'è un modo elegante per uscire dai guai: usare una formula ottenibile da un approfondimento di analisi matematica (sviluppo in serie di Taylor) che fornisce, per $x \ll 1$

$$\sqrt{1-x} \cong 1 - \frac{1}{2}x \quad (10)$$

Provate a usare la (10) inserendola nella (9) ; otterrete

$$\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 \cong \Delta t \cdot \frac{2uv}{c^2} \quad (11)$$

formula molto elegante dalla quale, inserendo i nostri dati, si ottiene $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = 400 \text{ ns}$ che fornisce il corretto ordine di grandezza.