

CAMPO MAGNETICO E FORZE MAGNETICHE.

1) Fenomeni magnetici.

In natura esistono sostanze dette **magnetiche** (tipicamente certi ossidi di ferro) che presentano proprietà particolari come quelle di attrarre piccoli oggetti di ferro. Il composto chimico con tali proprietà rimasto più famoso nella storia è Fe_3O_4 , chiamato Magnetite perché trovato anticamente in grande quantità in giacimenti presso la città greca di Magnesia. Tali sostanze, chiamate anche brevemente **Magneti**, se sagomate a forma di losanga (ago magnetico) sono anche capaci di orientare il proprio asse in una direzione che, in assenza di altri materiali magnetici, è approssimativamente il Nord geografico, e in presenza di un magnete a distanze sufficientemente piccole è funzione della posizione del magnete stesso.

Con questi elementi non si è in grado di fare vere e proprie misure (cioè esperimenti quantitativi) per ricercare regolarità e capire quindi le proprietà dei materiali magnetici.

Una svolta fondamentale costituì la scoperta da parte del danese Oersted (1819/20) dell'effetto di una corrente elettrica sull'orientazione di un ago magnetico. Pochi mesi dopo Ampère presentò i risultati di uno studio quantitativo sull'interazione tra correnti elettriche, frutto di un'ipotesi semplice e nello stesso tempo profonda: se una corrente ha effetti meccanici su un ago magnetico e quindi si può ipotizzare un'interazione tra i due sistemi, potrebbe esserci un'interazione tra due correnti. In caso affermativo, si sarebbe trovata una prima "parentela" tra magneti e correnti, con un'interessante "pista" nel comprendere la struttura delle sostanze magnetizzate (prima banale ipotesi: dentro i magneti ci sono delle correnti elettriche...). Descriveremo in dettaglio i risultati di Oersted e Ampère nei prossimi paragrafi.

2) I risultati di Ampère. L'attuale definizione del campione di corrente.

L'esperienza è quella descritta al par. 29.3 del testo (vedi fig. 29.10): due conduttori filiformi paralleli a distanza d , ad es. di sezione circolare di raggio a , di lunghezza $L \gg d \gg a$ (per la condizione $L \gg d$ verranno detti **infiniti**), percorsi da correnti di moduli I_1 e I_2 si attraggono se le correnti hanno verso concorde e si respingono nel caso contrario; la forza di interazione misurata in entrambi i casi vale:

$$F = \frac{k \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot L}{d} \quad (1)$$

Questa legge è tanto meglio verificata quanto maggiore è il rapporto $\frac{L}{d}$; si può dire che

vale rigorosamente per fili infinitamente lunghi. La costante vale $k = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$. Per motivi

che saranno più chiari in seguito, k nel sistema MKS si scrive come $\frac{\mu_0}{2\pi}$, dove l'altra costante μ_0 si chiama permeabilità magnetica del vuoto. La formula è interessantissima

anche perché lega grandezze meccaniche (F, L, d) a grandezze elettriche (le due correnti); queste ultime presentano oltretutto problemi non indifferenti nella loro misura, con conseguenze pesanti sulla definizione operativa del campione di corrente. L'intensità

di corrente elettrica, infatti, definita come $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, ha bisogno del campione di carica per

poterne definire l'unità di misura, e ciò comporta dei problemi (anche se c'è una via di

uscita offerta dalle leggi dell'elettrolisi). In realtà l'attuale definizione dell'Ampère è data proprio dalla (1) : la corrente di 1A è quella che percorre due fili paralleli "infiniti", cioè tali che $L \gg d$, a distanza $d = 1m$ che interagiscono con una F di $2 \cdot 10^{-7} N$ per ogni metro di lunghezza.

Questa forza è molto piccola, ma ben misurabile in opportune condizioni, con un apparato sperimentale abbastanza preciso e sensibile.

Un ultimo commento alla (1): questa è una tipica legge di forza di interazione; è simmetrica rispetto ai sistemi interagenti; decresce, come è ragionevole, con il crescere della distanza tra i conduttori. La **forza per unità di lunghezza** $\frac{F}{L} = F_{1,2}$ tra i due conduttori, contrassegnati stavolta come 1 e 2 in analogia con quanto fatto per le cariche puntiformi, vale $F_{1,2} = \frac{k \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$, chiamando d'ora in avanti r la loro distanza; il prodotto tra le correnti, se esse si prendono con il loro segno, rende ragione del cambiamento di verso di F con il verso delle correnti stesse; varia con l'inverso della distanza invece che con l'inverso del quadrato, ma il tipo così diverso di configurazione rispetto al caso delle due cariche puntiformi non consente di spingere troppo in là l'analogia con l'interazione coulombiana.

3) Il campo magnetico.

Torniamo un momento all'esperienza di Ampère e consideriamo per fissare le idee la forza sul conduttore 2 da parte del conduttore 1: in realtà tale forza si "distribuisce omogeneamente" sul conduttore, cioè, come verificato sperimentalmente, ogni porzione

di data lunghezza ΔL è soggetta ad una forza $\left(\frac{kI_1I_2}{r}\right) \cdot \Delta L$. Ciò giustifica tra l'altro l'uso

del concetto di "**forza per unità di lunghezza**" che ha senso soltanto se appunto la forza su un elemento di conduttore è proporzionale alla lunghezza dell'elemento di conduttore considerato; si può allora cercare di costruire una grandezza vettoriale dipendente dalla posizione (cioè un **campo vettoriale**) capace di descrivere in modo compatto ed elegante le interazioni tra correnti. Il primo passo è appunto quello di considerare un elemento di conduttore di piccole dimensioni dL (infinitesimo) centrato in un punto P, del conduttore

2; su tale elemento agisce la forza $dF = \left(\frac{kI_1I_2}{r}\right) \cdot dL$. Gli elementi che lo descrivono e che

compaiono nella formula sono I_2 e dL (per inciso mancherà da considerare il dato sull'orientazione dell'elemento dL , ma ciò sarà fatto tra poco). Il prodotto $I_2 \cdot dL$ sarà l'equivalente della carica di prova (ente spia) nella definizione del campo elettrico; r descrive la relazione tra il conduttore 1 (che sarà l'equivalente della carica generatrice di \vec{E} nella legge di Coulomb) e la posizione P dell'ente spia; I_1 descrive di nuovo il sistema che genera il campo (l'equivalente del valore Q della carica generatrice di \vec{E}).

Si adotta allora la seguente definizione: è detto **Campo Magnetico** generato dal conduttore rettilineo infinito percorso dalla corrente I_1 il vettore \vec{B} cui modulo vale

$$B = \frac{k \cdot I_1}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi r} \quad (2)$$

(ricordo che il modulo di un qualsiasi vettore \vec{B} è sempre contrassegnato con il simbolo

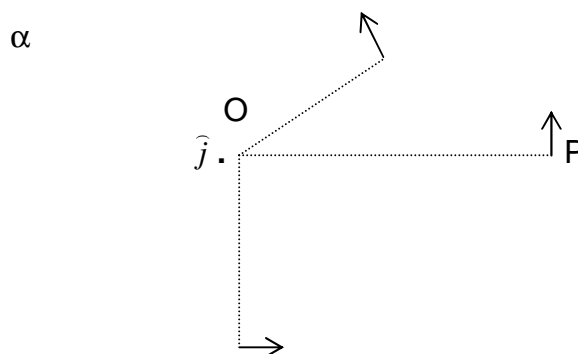
B , senza la freccetta). Se decidiamo, mantenendo la notazione adottata nella (2), di chiamare I (invece di I_2) il modulo della corrente che percorre l'elemento di conduttore "di prova", la (1) diventa alla fine $dF = (IdL)B$, con B che descrive l'effetto del filo generatore nel punto P e IdL descrive l'ente spia. Si noti l'analogia tra la formula precedente e quella ($F = qE$), che definisce il campo elettrico.

Non si riconosce ancora il carattere vettoriale del campo magnetico: a tale scopo verrà ora data una definizione molto semplice e nello stesso tempo generale ai fini della descrizione dei fatti sperimentali; è di per sé squisitamente operativa e consiste in quanto segue.

Sappiamo che un ago magnetico si orienta se è vicino ad una corrente (ed anche ad un magnete). Sappiamo anche che in assenza di questi, l'ago si orienta verso quello che è detto Nord magnetico, che chiameremo ancora per comodità Nord. Chiameremo allora **Polo Nord** (N) dell'ago l'estremità di esso che punta a Nord (analogamente per il **Polo Sud**). Definiamo ora la direzione di \vec{B} in un punto P quella di un ago magnetico posto in P (e ovviamente sottoposto all'azione magnetica del sistema fisico che genera il campo); definiamo il verso di \vec{B} come quello dal polo sud al Polo Nord dell'ago stesso.

Come accennato all'inizio, Oersted, poco prima degli esperimenti di Ampère, rilevò il cambiamento dell'orientazione di un ago magnetico posto nelle vicinanze di un conduttore percorso da corrente. Per l'esattezza osservò l'orientazione di un ago magnetico posto abbastanza vicino a un lungo conduttore filiforme percorso da una corrente di modulo I e avente direzione verticale. Riferiamoci alla figura 1 qui sotto: detto α il piano orizzontale (contenente la figura) a cui appartiene il centro di simmetria P dell'ago e detto O il punto di intersezione tra α e il conduttore, l'ago si orienta nel piano α in direzione ortogonale a quella della retta OP . Spostando l'ago sul piano α , esso si orienta sempre lungo la tangente al cerchio di centro O e raggio $r = \overline{OP}$; il verso dell'ago inoltre è antiorario se la densità di corrente \hat{j} è uscente dal foglio, cioè dal piano, e orario se \hat{j} è entrante. Ricordo che una convenzione universalmente accettata contrassegna con un **pallino** il verso **uscente** di un vettore di direzione ortogonale a un dato piano, e una **crocetta** a un vettore di verso **entrante**.

Fig. 1



A questo punto possiamo descrivere in modo completo il campo magnetico generato dal conduttore infinito percorso da corrente di modulo I . Consideriamo un qualunque piano perpendicolare alla direzione del conduttore (l'estensione infinita del conduttore rende equivalenti tutti questi piani ai fini dell'andamento di \vec{B} , per cui basta considerarne uno): il modulo di \vec{B} a distanza r dal conduttore è dato dalla (2):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3)$$

Questa definizione fu adottata per la prima volta nel 1820 dai francesi Biot e Savart, che, confermando le osservazioni di Oersted, trovarono sempre nel 1820 che la direzione di \vec{B} è tangente al cerchio di raggio r e di centro l'intersezione tra il nostro piano e il conduttore; il verso di \vec{B} è quello descritto in fig. 1. A proposito della direzione di \vec{B} , ricordo una definizione molto importante che è quella di linea di forza di un campo vettoriale: dato un qualsiasi campo vettoriale \vec{A} , una linea γ nello spazio si dice **linea di campo** (o anche **linea di forza**, termine di uso più comune) di \vec{A} se la direzione di \vec{A} è tangente a γ in ogni suo punto. Con la nostra definizione risulta che le linee di forza del campo \vec{B} del conduttore infinito in ogni piano perpendicolare al conduttore sono cerchi concentrici di centro l'intersezione tra tale piano e il conduttore. La nostra definizione di \vec{B} è "vincente" perché giustifica in modo semplice ed elegante la forza su un conduttore di prova anche quando viene modificata l'orientazione di tale conduttore rispetto al filo generatore (ricordo che per ora ci stiamo limitando al campo generato dal filo infinito...). Misure accurate effettuate variando in tutti i modi possibili l'orientazione del conduttore di prova portarono infatti ad una formula molto semplice ed elegante: come confermato dai dati sperimentali, la forza (possiamo chiamarla forza magnetica) su una **porzione di conduttore** di lunghezza dL è data in generale da

$$d\vec{F} = (I \cdot dL) \cdot \hat{u}_j \wedge \vec{B} \quad (4)$$

dove \hat{u}_j è il versore del vettore densità di corrente \vec{J} e I è di nuovo il modulo dell'intensità di corrente. Per la forza magnetica, si deve dunque usare un "ente spia vettoriale", dato da $I d\hat{u}_j$. Come è ragionevole attendersi, risulta poi che la **forza totale** a cui è sottoposto un conduttore qualsiasi percorso da una corrente I è la **somma vettoriale** di tutti i contributi elementari (a priori diversi perché \hat{u}_j e \vec{B} possono cambiare da punto a punto del conduttore) dati dalla (4); il caso particolare più semplice di questa situazione fisica molto generale è naturalmente quello del filo rettilineo infinito, per il quale il conduttore di prova è un altro filo rettilineo infinito (vedi anche fig. 29.10), che dà luogo alla (1) (controllare il verso della forza con la regola della mano destra). Come si può notare, la definizione di prodotto vettoriale data in precedenza e apparsa forse un po' artificiosa, acquista un significato più concreto in questa importante applicazione.

4) Forza di Lorentz .

Torniamo un attimo sulla (4) e domandiamoci quale meccanismo fisico dia luogo ad una forza provocata da una corrente, cioè da un insieme di cariche in moto, e agente su una corrente, anche se tale meccanismo non può essere collegato alla legge di Coulomb (la carica totale presente all'interno di ognuno dei circuiti è nulla...). Concentrando la nostra attenzione sul conduttore su cui agisce la forza espressa in generale dalla (4), mi aspetto che ogni porzione di conduttore contenga elementi "attivi", visto che la forza si distribuisce uniformemente sull'intero conduttore. Posso infatti ragionevolmente ipotizzare che la presenza di una forza esercitata sul conduttore sia il risultato di un effetto su ognuno dei portatori mobili di carica all'interno del conduttore stesso. Se riscriviamo la (4) e utilizziamo relazioni note dal capitolo precedente, otteniamo:

$$d\vec{F} = nqSvdl \cdot \hat{u}_j \wedge \vec{B} = dN \cdot q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4\text{bis})$$

dove dN è il numero totale di portatori presenti nell'elemento dl di conduttore. Secondo la nostra ragionevole ipotesi di "distribuzione in parti uguali" della forza su ogni portatore mobile di carica, otterremmo per la forza agente su una carica q :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (5).$$

Se una carica q in moto isolata immersa in un campo \vec{B} fosse sottoposta veramente a questa forza, la nostra ragionevole ipotesi sarebbe verificata; in effetti la (1) è confermata sperimentalmente nei laboratori di tutto il mondo, nei quali si fanno continuamente misure su particelle elementari cariche; la forza (5) prende il nome di **forza di Lorentz** (che chiameremo anche \vec{F}_L). A questo punto possiamo scrivere l'espressione più generale della forza esercitata su una carica q in presenza contemporanea di campi elettrici e magnetici:

$$\vec{F}_q = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (5 \text{ bis})$$

E' evidente che nel caso particolare in cui $\vec{E} = 0$ la forza si riduce a \vec{F}_L , nel caso particolare in cui $\vec{B} = 0$ è la semplice forza elettrica. Rimando all'ultimo paragrafo una breve discussione delle principali applicazioni concrete della (5 bis).

5) Proprietà generali di \vec{B} : circuitazione (legge di Ampère) e flusso.

Le due proprietà fondamentali del campo elettrico riguardavano la **circuitazione** e il **flusso** di \vec{E} . La circuitazione di \vec{E} è **nulla** e questo ci permette di definirne l'energia potenziale U e il potenziale V , con le importanti conseguenze che ne derivano. L'andamento del flusso di \vec{E} è descritto dalla legge di Gauss, che lega il flusso del campo attraverso la superficie S che delimita un certo volume V alla carica contenuta nel volume stesso. In notazione sofisticata:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (6)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_V Q_{\text{int}} \quad (7)$$

Qui γ è il circuito su cui si calcola il lavoro di \vec{E} ; V è il volume che racchiude le cariche, S la superficie chiusa che circonda V .

E' sorprendente come anche le proprietà fisiche di \vec{B} coinvolgano il flusso e la circuitazione. Considerando il caso semplice del filo rettilineo infinito percorso da corrente I , finora l'unico analizzato, si calcola facilmente la circuitazione se γ è un cerchio giacente su un piano α perpendicolare al filo infinito e centro nel punto di intersezione tra piano α e filo:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \quad (8)$$

Si può dimostrare che questo fatto è del tutto generale se \vec{B} non dipende dal tempo; in generale I si trasforma nella somma delle correnti circondate dal circuito (si dice **concatenate con il circuito**), per cui la circuitazione è **nulla** in un circuito γ che non circonda alcun conduttore. In generale

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}} \quad (8\text{bis})$$

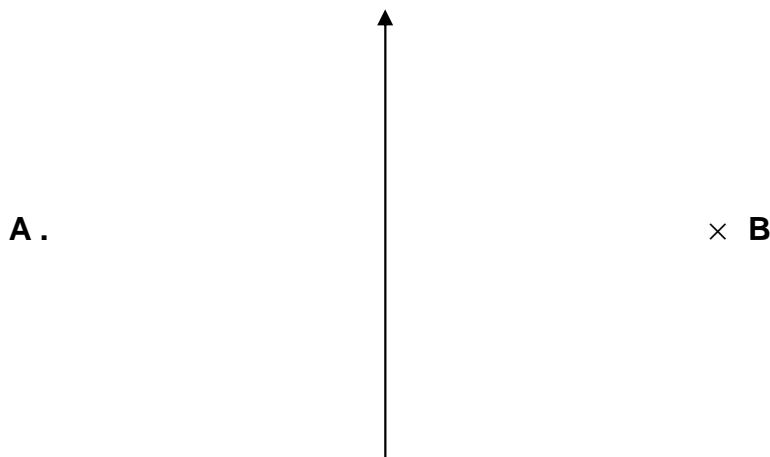
La (8bis) prende il nome di **legge della circuitazione di Ampère**. Il problema del flusso di \vec{B} attraverso una superficie S chiusa che racchiude un volume V è collegato a quello cosiddetto delle "sorgenti del campo": la **legge di Gauss**, espressa dalla (7), ci dice che il flusso di \vec{E} è diverso da zero se il volume V racchiude una carica elettrica, cioè una sorgente di campo elettrico; le linee di forza escono tutte dalla carica o vi entrano tutte a seconda del suo segno, si può dire anche che le cariche sono le sorgenti delle linee di forza del campo. Varie evidenze sperimentali, anche di tipo molto sofisticato, mostrano che **le linee di forza di \vec{B} sono sempre chiuse**: questo è coerente con il fatto che il flusso di \vec{B} uscente da un qualsiasi volume delimitato da una superficie chiusa S debba essere **nullo**:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9)$$

Tra le (6), (7), (8bis) e (9), quest'ultima è certamente la "verità più nascosta", la legge meno evidente sperimentalmente; è continuamente a tutt'oggi messa alla prova nei laboratori di fisica di tutto il mondo. Vedremo che è però coerente con tutti i fatti sperimentali di fisica macroscopica (e anche atomica) che si conoscono attualmente; la possiamo perciò ritenere affidabile ed adoperare quando servirà. Osserviamo inoltre che queste quattro equazioni sono valide per **tutti** i campi elettrici e magnetici **statici**, cioè indipendenti dal tempo; si parla infatti rispettivamente di **ELETTROSTATICA** e **MAGNETOSTATICA**. Nell'ultima parte del corso sarà necessaria una generalizzazione della (6) e della (8bis), che darà le informazioni definitive sulle proprietà dei campi \vec{E} e \vec{B} . La (8bis) e la (9) sono sufficienti per le nostre applicazioni, anche se ci manca un metodo generale per ricavare il campo magnetico generato da un **qualsunque circuito** percorso da corrente; abbiamo infatti usato un sistema fisico estremamente anomalo per introdurre il

concetto di campo \vec{B} . Non vi sarà sfuggito infatti che un conduttore (infinito o finito che sia) percorso da corrente è un sistema fisico che “non sta in piedi”: c’è bisogno cioè di un circuito per far scorrere corrente, e quindi di un “filo di ritorno”! Il fatto è che esiste una formula **generale** per ricavare il campo magnetico generato in un **punto arbitrario** da un **circuito arbitrario**; è la (29.1) del paragrafo 29.2 e prende anch’essa, come la (3) il nome di legge di Biot-Savart. La discuto in un’appendice (un file che manderò a chiunque interessato!) e consente di ricavare il suo caso particolare (3) risolvendo un integrale di difficoltà medio-alta (vedi anche la fine del par. 29.2) che sarete in grado di affrontare nel secondo quadrimestre. Di fronte alla difficoltà matematica oggettiva della legge generale di Biot-Savart (in effetti la magnetostatica è decisamente più ostica da affrontare sul piano matematico rispetto all’elettrostatica...) ci accontenteremo di assumere la validità della (8bis) e della (9), come del resto abbiamo fatto con la legge di Gauss (7); ciò sarà sufficiente per le nostre applicazioni. Vorrei però almeno accennare alle proprietà del campo magnetico generato dal circuito elettrico con la geometria più semplice possibile: un conduttore circolare percorso da corrente, detto anche **spira circolare**; in generale per un circuito di forma semplice giacente su un piano e percorso da corrente si usa il nome di **dipolo magnetico**. Nel disegno molto schematico della fig.2 il piano della figura è ortogonale a quello della spira circolare e passante per il suo centro O per cui i punti A e B sono le intersezioni con la spira, con l’intensità di corrente scelta (arbitrariamente) uscente dal foglio in A (da cui il simbolo del puntino) ed entrante in B (da cui il simbolo della freccetta). Con la (29.1) potremmo ricavare facilmente il valore di \vec{B} nel centro O del cerchio, punto medio di AB, ottenendo la (29.10); abbastanza facilmente quello sull’asse del segmento AB, ottenendo un’espressione (la 29.26 del par.29.6) funzione della posizione sull’asse. Se ci spostiamo rispetto all’asse, il calcolo di \vec{B} con la (29.1) diventa proibitivo! L’unico risultato semplice da ricordare e già utilizzabile nel prossimo paragrafo è la direzione e il verso del campo sull’asse: come evidenziato dalla linea di forza disegnata in fig. 2, il campo sull’asse è diretto verticalmente (per motivi di simmetria...) e verso l’alto con il verso della corrente come in figura (ovviamente verso il basso con il verso opposto della corrente).

Fig.2



Nel prossimo paragrafo saremo in grado di calcolare usando la (8 bis), pur con i mezzi matematici “poveri” a nostra disposizione e con le ultime semplici nozioni apprese sulle spire percorse da corrente, il campo magnetico generato dal sistema fisico che è il “gemello magnetico” del condensatore, fondamentale per la sua semplicità e per le sue applicazioni fisiche: il **solenoide** (o **bobina**).

6) Il calcolo del campo \vec{B} del solenoide lungo.

Riassumo i dati sperimentali di laboratorio di fisica per le linee di forza di \vec{B} , osservando la disposizione della limatura di ferro, a proposito del campo \vec{B} generato da un solenoide "lungo" percorso da corrente; intendo per "lungo" un solenoide (per fissare le idee cilindrico) con spire strettamente avvolte, per il quale l'altezza h del cilindro è molto maggiore del diametro D del cerchio di base. Si osservano i seguenti risultati approssimati, con un'approssimazione tanto migliore quanto minore è il rapporto $\frac{D}{h}$:

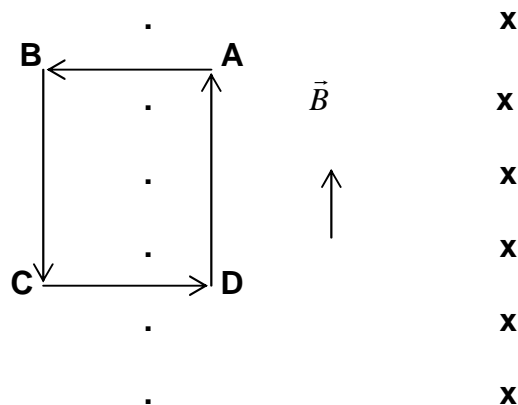
- le linee di campo all'interno del solenoide sono parallele all'asse del cilindro;
- il modulo del campo \vec{B} è uniforme all'interno del solenoide, cioè del cilindro;
- il campo \vec{B} è nullo in tutti i punti esterni al solenoide, cioè al cilindro.

La condizione c) è inoltre tanto meglio verificata quanto più i punti esterni sono vicini ai bordi del solenoide. Tenendo conto di queste tre condizioni, è possibile calcolare facilmente il campo magnetico utilizzando la legge di Ampère (8bis).

Si consideri allo scopo la figura 3: essa rappresenta un arbitrario piano contenente l'asse del solenoide. Qui sono schematizzate alcune spire, per le quali il "passo" (distanza tra spire contigue) è stato volutamente esagerato per comodità di disegno; è stata adottata poi la convenzione dei puntini e delle crocette per i versi delle correnti. Si deve intendere qui che un osservatore che guarda il solenoide dall'alto vede in ogni spira un vettore densità di corrente avente verso antiorario.

Consideriamo il circuito di forma rettangolare ABCD in fig. 3: ho disegnato il circuito senza preoccuparmi di piazzarlo simmetricamente rispetto alla spira, perché so già dai dati b) e c) che il campo è comunque nullo nei punti esterni al solenoide e ha lo stesso valore nei punti interni.

Fig. 3



Se chiamiamo $\overline{AD} = \Delta l$ e il numero di spire concatenate con il circuito ABCD è detto Δn , calcoliamo con la (8bis) la circuitazione di \vec{B} su ABCD, scegliendo arbitrariamente il verso antiorario di percorrenza del circuito, come evidenziato nella figura. Il contributo alla

circuitazione dei lati AB e CD è nullo, perché nelle parti di essi esterne al solenoide il campo è nullo e nelle parti interne è diretto lungo l'asse del solenoide, e quindi ortogonale all'elemento di circuito. Il contributo del lato BC è anch'esso nullo essendo BC interamente esterno al solenoide. L'unico lato che fornisce un contributo diverso da zero è AD; tale contributo, per le condizioni a) e b) , vale semplicemente $B\Delta l$.

Dalla (4bis) si ottiene allora:

$$B\Delta l = \mu_0 \Delta n I \quad (10)$$

In un solenoide le spire sono avvolte omogeneamente, cioè in modo che la grandezza $n = \frac{\Delta n}{\Delta l}$, numero di spire per unità di lunghezza (attenzione a non confonderlo con l'altro n , il numero di portatori per unità di volume!), sia indipendente da Δl ; n è quindi un parametro caratteristico del solenoide, tanto maggiore quanto minore è il passo, cioè quanto più le spire sono strettamente avvolte. Detta allora L la lunghezza del solenoide e N il numero totale delle spire, si ha ovviamente $n = \frac{N}{L}$. Dalla (10) si ottiene allora:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I \quad (10 \text{ bis})$$

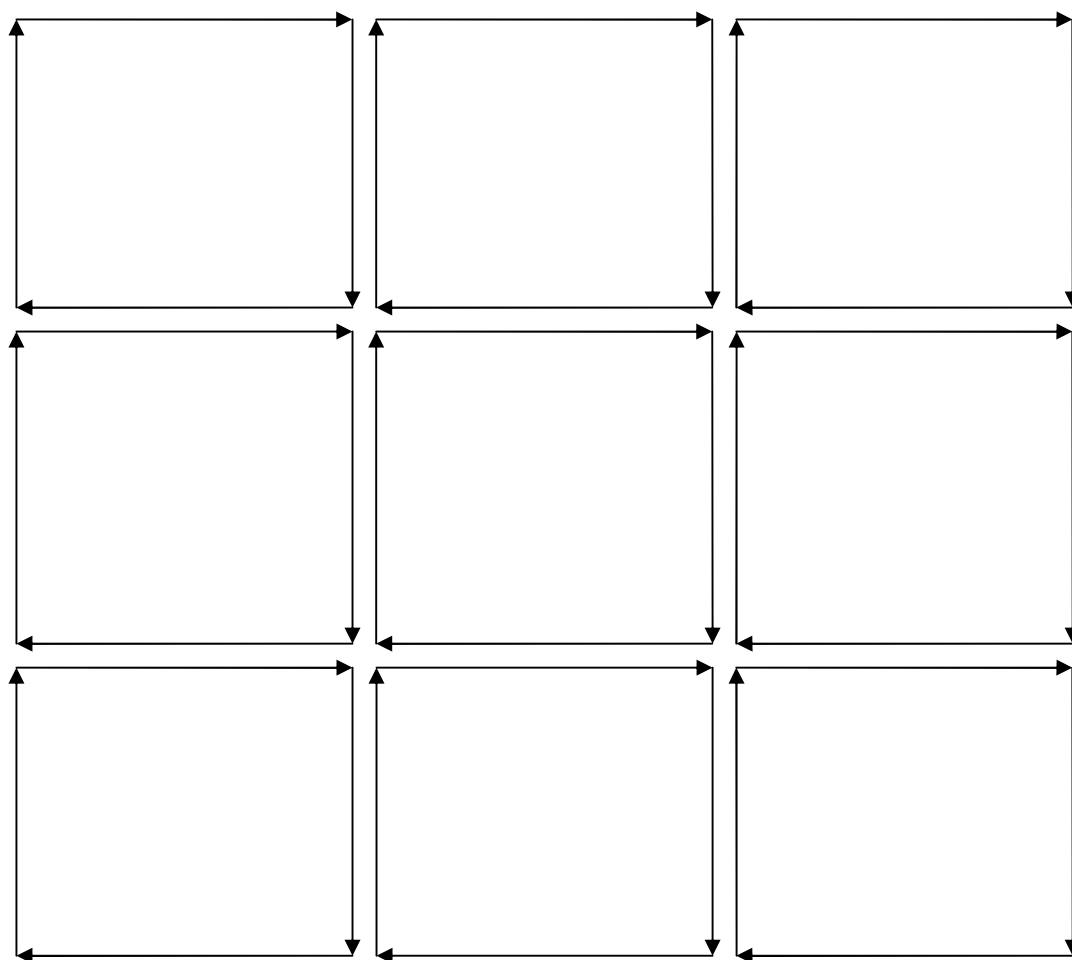
La (10 bis) ci fornisce finalmente l'espressione del campo generato dal solenoide in funzione della corrente e di parametri geometrici e costruttivi. E' uniforme all'interno del sistema e nullo fuori. Come avrete senz'altro percepito, per l'analogia delle caratteristiche dei due campi generati, il solenoide si può senz'altro meritare l'appellativo di "gemello magnetico" del condensatore piano.

7) Campo generato da un magnete.

E' arrivato il momento di sviluppare l'ipotesi formulata all'inizio del capitolo, a proposito del legame tra magneti e correnti elettriche. Prendiamo un qualsiasi magnete, per esempio un piccolo **magnete permanente** a barra disponibile in laboratorio: esso è costituito di un materiale contenente tipicamente ferro (o altri materiali con proprietà fisiche equivalenti come ad esempio nichel o cobalto) su cui è stato in precedenza applicato un campo \vec{B} abbastanza intenso. L'atomo di ferro (o uno di quelli appena citati) ha speciali proprietà legate appunto alla meccanica valida per gli atomi (come noto detta **meccanica quantistica**), in particolare al cosiddetto momento angolare intrinseco (**spin**) dei suoi elettroni.

Un semplice modello descrive il comportamento di questi atomi applicando la fisica dei fenomeni elettrici e magnetici che conosciamo noi; questa non è ovviamente la meccanica quantistica, ma quella che si basa sulle leggi di Newton (si parla in questo caso di **meccanica classica**) Il nostro modello classico descrive l'atomo di ferro (o equivalente) come una spira (ad esempio circolare o quadrata) percorsa da una corrente costante, naturalmente la stessa per tutti gli atomi "magnetici della stessa specie. Ricordo che abbiamo già chiamato questo sistema fisico **dipolo magnetico**: è un nome comodo, che useremo ancora. Per il nostro dipolo magnetico possiamo pensare a una spira circolare o quadrata, non importa entrare nei dettagli perché ci accontenteremo di fornire solo alcune semplici caratteristiche qualitative sulle proprietà fisiche del nostro magnete; ovviamente un magnete è costituito da un numero enorme di dipoli magnetici. Definiamo il verso di un dipolo magnetico come quello del campo \vec{B} da esso generato sull'asse di simmetria della

sua “spira equivalente” ; si presume ragionevolmente che in un pezzo di ferro i dipoli magnetici siano orientati casualmente, cioè i loro versi siano casuali, non esistendo direzioni privilegiate dello spazio. In realtà applicando un campo magnetico uniforme \vec{B}_0 opportunamente intenso, come abbiamo detto che si fa per trasformare un pezzo di ferro in un magnete, tutti i dipoli (almeno in questo semplice modello) si orientano nel verso di \vec{B}_0 , di cui poi non c'è più bisogno e che viene quindi eliminato. Che cosa è successo a questo punto? Supponiamo, per fissare le idee, che il magnete sia un parallelepipedo a base quadrata ed esaminiamo il campo magnetico generato dagli atomi-dipoli magnetici di un sottilissimo strato del parallelepipedo, ottenuto sezionando parallelamente alle basi. Lo spessore dello strato sia costituito da un solo atomo e con un lato del quadrato corrispondente a n atomi-dipoli magnetici; il nostro strato contiene quindi n^2 atomi di ferro. La situazione è descritta nel disegno qui sotto:



Qui i dipoli sono orientati con verso entrante nel foglio e $n = 3$; ovviamente non sembra avere molto senso fisico uno strato con solo nove dipoli... ma riflettiamo un attimo: il campo \vec{B} generato da questo sistema fisico si riduce a quello generato dai lati esterni delle spire, annullandosi a due a due quelli generati dai rimanenti lati . In altre parole lo strato, qualunque sia n , genera lo stesso campo \vec{B} di una spira quadrata macroscopica (essendo n un numero macroscopico) percorsa dalla corrente di un atomo-dipolo magnetico e di lato uguale a quello della base quadrata del parallelepipedo.

Sommando ora gli effetti generati da ognuno degli strati che compongono il magnete, equivalenti a spire percorse dalla stessa corrente giacenti su piani paralleli, otteniamo l'equivalente di un solenoide (a base quadrata), ovviamente non infinito e con il suo interno non raggiungibile, a differenza del solenoide lungo del paragrafo precedente, in quanto ovviamente occupato dal ferro. Le linee di forza di \vec{B} sono comunque praticamente uguali a quelle di un solenoide finito: vedi in proposito il par. 32.6 del testo.

8) Moto di una carica in campi elettrici e magnetici uniformi e costanti.

Cosa succede se \vec{E} e \vec{B} sono uniformi e costanti? Consideriamo nella (5bis) due casi particolari: a): $\vec{B} = 0$; b): $\vec{E} = 0$. Nel caso a) il moto è uniformemente accelerato e la traiettoria parabolica, con le stesse tecniche risolutive imparate al terzo anno. Il caso b) è nuovo: trattiamo intanto la semplice situazione in cui la velocità ad un dato istante, che assumiamo come istante $t = 0$, abbia direzione perpendicolare a quella di \vec{B} . Dalla (5bis), che ovviamente si riduce alla (5), si comprende che la traiettoria si mantiene piana (giacente nel piano perpendicolare alla direzione di \vec{B} e contenente il punto \vec{r}_0); inoltre \vec{F}_L fa deviare la particella senza compiere lavoro su di essa perché è sempre perpendicolare a \vec{v} , cioè alla direzione del moto, da cui, dato che l'energia cinetica non varia, il modulo della velocità è costante: $v = v_0$. Questa proprietà fondamentale della forza di Lorentz, del tutto singolare, la rende equivalente alla forza centripeta del moto circolare uniforme; poiché il modulo della velocità non varia, ponendo $F_L = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$ si ottengono banalmente il raggio della traiettoria $r = \frac{mv}{qB}$ e la pulsazione (e velocità angolare) del moto $\omega = \frac{qB}{m}$, che è detta **pulsazione di Larmor** (vedi anche par. 28.6 del testo, dove si parla semplicemente di pulsazione ω). Se c'è, nel caso generale, anche una componente di \vec{v}_0 parallela a \vec{B} , il moto della particella è la composizione di un moto circolare uniforme in un piano perpendicolare alla direzione di \vec{B} con un moto uniforme nella direzione stessa del campo; infatti lungo quella direzione la forza di Lorentz non ha effetto. Per vedere meglio questo, basta prendere il prodotto vettoriale in coordinate cartesiane (vedi il capitolo degli appunti sui prodotti vettoriali) e porre \vec{B} lungo l'asse z. Risulta che una componente della velocità lungo quest'asse non contribuisce alla forza di Lorentz e quindi all'accelerazione, che non ha componente lungo l'asse z. Per completezza, riporto la scrittura della (5) usando il secondo principio della Dinamica: utilizzando l'ipotesi di campo diretto lungo l'asse z, si scrivono facilmente le tre componenti cartesiane dell'equazione del moto, che rappresentano un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} ma_x = qv_y B \\ ma_y = -qv_x B \\ ma_z = 0 \end{cases} \quad (11)$$

La terza equazione nella (11) è quella di un moto uniforme: la componente z del vettore posizione dipende dal tempo in modo lineare. Se ad un certo istante (appunto, poniamo $t = 0$) la componente v_z è nulla, rimane nulla; se poniamo per comodità $z_0 = 0$, il moto si

svolge completamente nel piano xy ed è governato dalle prime due equazioni. Queste contengono solo le variabili x e y ; se le risolviamo, otteniamo proprio un moto circolare uniforme con la pulsazione di Larmor. Nel caso generale occorre considerare la sovrapposizione del moto circolare per le componenti x e y e di quello uniforme per la componente z del vettore posizione; si ottiene una traiettoria del moto elicoidale: il primo moto non piano che incontriamo ufficialmente sulla nostra strada (vedi anche par. 28.6 e fig. 28.11).