Appunti di dinamica relativistica

1) Impulso e Energia di una particella

Abbiamo discusso la base della Cinematica relativistica cioè l'invarianza del tempo proprio $\Delta\tau$; ne abbiamo scritto anche la sua espressione infinitesimale, cioè relativa a due eventi dello spaziotempo molto vicini tra loro. Abbiamo trovato che, se in un dato sistema di riferimento S tra i due eventi $(x\,,t)$ e $(x+dx\,,t+dt)$ una data particella di massa si muove lungo l'asse x con velocità $v=\frac{dx}{dt}$, il tempo proprio tra i due eventi "infinitamente vicini" ha l'espressione seguente:

$$d\tau = dt\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (1)$$

Elevando al quadrato la (1) si ottiene un'altra espressione molto interessante:

$$c^2dt^2 - dx^2 = c^2d\tau^2 \qquad (1\text{ bis})$$

Abbiamo poi definito l'impulso relativistico (che nella Meccanica newtoniana è più spesso chiamato quantità di moto). Limitandosi ad un moto rettilineo, è stata individuata per l'impulso la seguente espressione compatibile con il principio di corrispondenza:

$$p = m\frac{dx}{d\tau} \qquad (2)$$

che, usando la (1), si può riscrivere nel modo seguente:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2\text{ bis})$$

Supporremo la massa m invariante, cioè non dipendente dal sistema di riferimento: la definiamo infatti come quella misurata nel sistema di quiete della particella (usando la seconda legge di Newton, cioè applicando una piccola forza e dividendo per l'accelerazione misurata). Supporremo anche che per un corpo isolato l'impulso sia costante nel tempo, cioè si conservi, il che significa per la (2 bis) che rimane costante la sua velocità; ciò corrisponde ad ammettere, ragionevolmente, che continui a valere anche in Relatività il primo principio della Dinamica (si fa valere ancora il principio di corrispondenza).

Definiamo ora per il nostro punto materiale di massa m un'altra grandezza fisica fondamentale che chiameremo **energia** della particella:

$$E = mc^2\frac{dt}{d\tau} \qquad (3)$$

che, sempre per la (1), si può riscrivere come

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3\text{ bis})$$

Osserviamo che per $v=0$ si ottiene dalla (3 bis) $E=mc^2$, detta energia a riposo della particella.

Combinando la (2 bis) e la (3 bis) si ottiene

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4 \qquad (4)$$

Si confronti la (4) con la (1 bis): in entrambe, a primo membro ci sono le combinazioni di grandezze fisiche (spostamento, intervallo di tempo, impulso, energia) che dipendono dal sistema di riferimento, a secondo membro ci sono invece due invarianti. Questo sarà fondamentale nelle applicazioni che seguiranno.

2) Particelle in interazione

Vediamo cosa cambia se il moto non è uniforme, se cioè il corpo è in interazione; ci aspettiamo che E e p varino nel tempo, ma il secondo membro della (4) contiene solo costanti del moto: la massa m e la velocità della luce c sono cioè sia indipendenti dal sistema di riferimento che, in un dato sistema di riferimento, indipendenti dal tempo, cioè costanti del moto. Studiamo il moto usando ancora il principio di corrispondenza, cioè definendo la forza "alla Newton":

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{5}$$

Il lavoro elementare della forza, $dL = Fdx$, si scrive allora dalla (5) come

$$dL = vdp \tag{6}$$

Si può scrivere la (4) nell'evento $(x + dx\ , t + dt)$ come

$$(E + dE)^2 - c^2(p + dp)^2 = m^2c^4 \tag{4 bis}$$

Combinando la (4) e la (4 bis), sviluppando i quadrati e considerando trascurabili i termini in dE^2 e dp^2 si ottiene:

$$EdE - c^2pdp = 0 \tag{7}$$

A questo punto dalle (2 bis) e (3 bis) si ricava

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \tag{8}$$

e usando la (6), la (7) e la (8) si ottiene finalmente

$$dL = dE \tag{9}$$

Usando ancora il principio di corrispondenza, supponiamo di poter usare il "teorema delle forze vive" della meccanica newtoniana $dL = dT$, con T energia cinetica del corpo. Avremo quindi

$$dE = dT \tag{9 bis}$$

Si potrà scrivere allora per l'energia cinetica relativistica

$$E = T + cost \tag{10}$$

Supporremo (ragionevolmente) in base al principio di corrispondenza che per $v = 0$ si debba porre $T = 0$ da cui usando la (3 bis) si ottiene

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{10 bis}$$

Abbiamo così finalmente ottenuto l'espressione della **energia cinetica relativistica.**